NOTAS DE LA CONTRATAPA

“En 1965, un joven matemático me insistió [*pressed me*] para que revisara su trabajo, ya que, según dijo, no podía encontrar a nadie más que él creyera capaz de entenderlo. Puesto que tenía una buena opinión [*I thought well*] de lo poco de su producción que había visto antes, y como siento una gran simpatía por aquellos que tratan de despertar interés por [*gain attention for*] sus nuevos trabajos aún desconocidos, contra la fuerza abrumadora [*the odds*] de la indiferencia establecida, acepté discutirlos con él. Pero a medida que se acercaba el momento de nuestro encuentro [*his arrival*] me llegué a convencer de que sería completamente incapaz [*quite unable*] de manejar sus escritos y su nuevo sistema de notación. Me llené de espanto [*I was filled with dread*]. Pero cuando se presentó [*he came*] y oí sus explicaciones encontré que podría de nuevo retomar el paso [*get into step*] y seguir el hilo de su trabajo. Disfruté inmensamente [*greatly*] esos pocos días, especialmente porque su obra era original, además de excelente, según me pareció a mí.”

Bertrand Russell,
Autobiography

“Tengo la sospecha de que estoy reseñando la obra de un genio…Sheffer redujo toda la lógica de Boole a cinco postulados no probados. Spencer-Brown demuestra los cinco, todos, en un par de páginas casuales. En cuanto al famoso ‘operador de Sheffer’, en si un triunfo de la simplificación en matemáticas, Spencer-Brown tranquilamente [*calmy*] nos dice que ‘puede ser omitido’. Tiene razón—como veo ahora (pero no pude ver antes). Ni habría anteriormente considerado el teorema de Gödel como algo lógicamente trivial. Estos cambios de opinión son el resultado de haber pasado dos días encantadores [*delightful*] en la Plaza de San Marcos inmerso en esta apretada [*condensed*] exposición de un argumento exquisitamente equilibrado [*poised*].”

Stafford Beer, *Nature*

“Estamos ante un libro elegante y fascinante, y podría ser valioso como una introducción a todas las formas de pensamiento matemático, aunque será de especial interés para los lógicos.”

Books
and Bookmen

“El antiguo y primordial misterio que todavía desconcertaba [*puzzled*] a Ludwig Wittgenstein, a saber, que el mundo que conocemos está construido de tal manera que puede verse a si mismo, lo ha resuelto G. Spencer-Brown mediante un giro de la percepción, de lo más sorprendente…Su libro debería estar en las manos de toda la gente joven.”

Heinz von Foerster, *Whole*
Earth Catalog

“El más importante libro filosófico de Occidente desde el *Tractatus* de Wittgenstein. Nadie más ha descendido hasta las raíces mismas del pensar como lo ha hecho esta obra.”

Alan Watts

“Un tremendo logro creativo.”

J. G. Bennet

PREFACIO A LA EDICIÓN LIMITADA DE 1994:

Ha transcurrido toda una generación desde que *Laws of Form* [Las Leyes de la Forma] se publicó en inglés por primera vez. Mientras tanto, el percatarse [*awareness*] humano [de las cosas] ha cambiado, y lo que no pudo decirse entonces, puede ser dicho ahora. En particular, me puedo referir hoy a la falsedad de la actual [*current*] doctrina científica, lo que llamo la duplicidad [*duplicity*] científica: que la apariencia y la realidad son de algún modo diferentes.

Puesto que que no hay otro medio para estudiar la realidad, más que la apariencia, ambas son en definitiva lo mismo. Pero el científico no sólo supone que son diferentes, y que él está 'gradualmente descubriendo' la una por medio de la otra: también supone, otra vez, que el percatarse [*awareness*] (que erróneamente confunde con 'la conciencia' [*consciousness*]) de la realidad-apariencia es algo que es [también] diferente [de esta última]; y que el universo podría haber 'existido' durante 'billones de años' en medio de una total ausencia del percatarse [*total unawareness*] de lo que estaba sucediendo. Esto lo llamaré la triplicidad científica. De nuevo, por definición, no puede haber ninguna apariencia que no sea un percatarse [*an awareness*] de la apariencia [*appearance*] y, por supuesto, ningún percatarse [*awareness*] que no sea una apariencia [*an appearance*] del percatarse [*of awareness*]. Y puesto que la escala [nominal] de lo real-irreal no puede aplicarse a la apariencia en general (como puede hacerse, por ejemplo, para distinguir entre soldados reales y soldados de juguete), cualquiera que sea lo que aparece, como *apariencia*, tiene que ser [*must be*] igualmente real e irreal.

Invirtiendo [*reversing*] las falsas distinciones, arribamos a lo que llamo la *triple identidad*, de manera destacada la identidad, por definición, de la realidad [*reality*], la apariencia [*appearance*] y el percatarse [*awareness*]. Es notable [*remarkable*] cómo todos los "bloques de construcción" de la existencia aparecen com triuniones. (Compárese la así llamada 'divina trinidad' de la cristiandad, que es meramente un resumen de nuestra percepción de cómo construir la formación de cualquier cosa que sea). Es la triunión lo que aparentemente [*apparently*] proporciona [*provides*] el mágico principio inflatorio [*inflatory*] que hace que todo aparezca como si estuviera realmente ahí [*there*].

La palabra 'ahí' [*there*] hace [*supplies*] el truco. No existe en realidad ningún "donde" [*where*] para que el 'ahí' [*there*] pueda estar o ser. Ni hay tampoco ningún "cuando" [*when*]. Todos estos son [vii] construcciones de la imaginación, invenciones de formaciones aparentemente estables para las apariencias aparentes [*apparent appearances*]. De ahí otra manera de expresar la triple identidad: la identidad de la imaginabilidad [*imaginability*], la posibilidad, y la realidad [*actuality*]

El universo es simplemente lo que aparecería [*would appear*] si pudiera. Sus leyes son las leyes de lo posible, llamadas por Sakyamuni los enlaces [*links*] de la coproducción condicionada, llamadas por mí el cálculo de las indicaciones. Cada uno imparte [*teaches*] exactamente la misma enseñanza [*teaching*], de qué manera lo que no es posible que pueda ser algo [*what cannot possibly be anything*] viene a aparecer como si fuera algo. Puesto que hay sólo un modo en que esto puede suceder, la enseñanza es siempre la misma. Desafortunadamente los seres humanos tienen una propensión infantil a convertir en religiones cualquier cosa que aprenden y cuando esto ocurre la enseñanza original se corrompe y se olvida, y tenemos que disponernos [*set out*] de nuevo a redescubrirla.

Una cosa no es posible a menos [*unless*] que sea imaginable y nunca podríamos confirmar que era posible a menos que apareciera en la realidad [*actuality*]. Así lo que es posible siempre se encontrará que existe, y su existencia real [*actual*] (por ejemplo, el helio, carbono 60) será descubierta poco después [*soon after*] de que su posibilidad hubiera sido imaginada. Lo que existe es formalmente construido postulando la imaginación de un ser hipotético que se supone que lo percibe, y seres diferentes harán surgir [*will bring about*] la construcción de existencias [*existences*] diferentes.[1] Un ser totalmente diferente construirá una existencia completamente diferente.[2]

"Nosotros" producimos [*make*] una existencia separando [*taking apart*] los elementos de una triple identidad. La existencia cesa cuando los ponemos juntos de nuevo. Sakyamuni, el único autor que evidentemente descubrió estas leyes, observó [*remarked*] en este contexto, 'Existencia es dualidad: no-existencia [viii] es no-dualidad'.[3]

El lado estúpido de nosotros [4] [*both of us*] va a preguntar ahora por qué dijo 'dualidad' y no 'triplicidad'. Mi propia tarea es entrenar su humanidad ('humano', dicho sea de paso, significa 'terrenal' [*earthling*]) para que encuentre sus propias respuestas, pero en esta ocasión haré lo que usted espera de mí y se lo diré. Cualquier indicación implica dualidad, no podemos producir una cosa sin coproducir lo que ésta no es, y cada dualidad implica triplicidad: lo que la cosa es, lo que ella no es, y el límite entre ambos. De este modo, como se explica en el capítulo uno de las Leyes, usted no puede indicar nada sin definir dos estados, y no puede definir dos estados sin crear tres elementos. Ninguno de éstos existe realmente, o separado de los otros. En realidad, nunca hubo [*there never was*], nunca podría haber [*there could never be*], y nunca habrá nada en absoluto [*there never will be anything at all*].

¡Vaya! Usted siempre lo supo. Ninguna otra respuesta tiene sentido.

Todo lo que yo enseño son las consecuencias de que no haya nada [*of there being nothing*]. El perenne error de los filósofos occidentales ha sido suponer, sin justificación alguna, que la nada no puede tener consecuencias [5]. Al contrario: no sólo puede, sino que tiene que tenerlas [*not only it can: it must*]. Y una de las consecuencias de que no haya nada es la inevitable apariencia [*appearance*] de "todo esto" [*of "all this"*]. ¡Ningún problema! [*No problem!*]

Si usted desea unirse a la hermandad de mis enseñanzas para hombres y mujeres, por favor dése a conocer y organicémosla.

[*página ix*]

Usted se asociará a una hermandad [*siblinghood*] llamada TARATI

Es bastante fácil probar matemáticamente y ver intelectualmente que en realidad nada existe. Lo más difícil de lograr, tras años de falso condicionamiento [*false conditioning*], es sentirlo intuitivamente y actuar de conformidad [*act upon it*] de manera natural.

Mi vida personal, al igual que la suya, se encuentra tan desubicada [*misplaced*] como la de todos los demás. Lo que hace notable [*remarkable*] mi trabajo y el de cualquier otra persona [*and anyone's else*] es que me he identificado con el conocimiento natural no humano [*natural non human knowledge*] que no viene de mí, sino de ninguna parte [*nowhere*], y es, al igual que la música de Mozart, de la naturaleza y la consecuencia de nada en absoluto [*nothing whatever*].

[*página x*]

Notas al Pie de Página. (*página viii*)

[1] No sólo la existencia física, sino toda creación está sometida a la misma ley. 'El arte se produce [*art works*] de acuerdo con un plan [*with design*], pero la obra de arte debe [*ought*] tener la apariencia [*the appearance*] de no haber sido preconcebida [*of being undesigned*], y debe juzgarse sobre esa base [*ground*]. El arte crea representaciones [*pictures*] en la imaginación, regularmente sin una ley consciente, y deliberadamente [*designedly*] sin un propósito consciente. Una obra que sea conocida y reconocida como el producto de la pura [*mere*] inteligencia, nunca será aceptada como una obra de arte, por más perfecta que sea su adaptación a sus fines. Siempre [*whenever*] que vemos que la reflexión consciente ha intervenido [*acted*] en el ordenamiento [*arrangement*] del todo [*whole*], la encontramos pobre.' –Hemholtz, *Sensations of Tone* [Sensaciones del Tono], 1877.
[2] 'El mundo de los felices es cabalmente [*altogether*] diferente del mundo de los infelices.'-Wittgenstein, *Tractatus*, 1922.
[3] *The Large Sutra* [El Gran Sutra], Conze, 1975.

Notas al Pie de Página. (*página ix*)

[4] Mientras más cultiva un ser la conciencia [*consciousness*] a costa del percatarse [*awareness*], más estúpido se vuelve. Por ejemplo, la memoria del percatarse, que puede recuperarse mediante la hipnosis, es prácticamente perfecta, mientras [*whereas*] que la
memoria de la conciencia es inexacta [*inaccurate*] y corrupta. La civilización occidental ha
promovido la conciencia y descuidado el percatarse casi hasta el punto de la más completa idiotez [*idiocy*]. Yo mismo he tenido que pasarme la mayor parte de mi vida deshaciendo y revirtiendo [*reversing*] los destructivos embates [*ravages*] de mi educación unilateral [*one sided*], y ésta es la primera disciplina que tengo que enseñarle. [Continúa...]

Notas al Pie de Página. (*página ix*) (Continuación)

[5] La idea de que la creación debe ser la consecuencia de 'algo' es estúpida [*moronic*]. Ninguna cosa puede tener consecuencia alguna (Véase el Apéndice 2,

pp 127 y ss). Si originalmente hubiera algo, envenenaría [*it would poison*] la totalidad del proceso creativo. Sólo la nada es suficientemente inestable para dar origen a interminables [*endless*] concatenaciones de experiencias diferentes. [6] Necesitamos recaudar dinero para construir [*build*] una Escuela de mis métodos, y finalmente [*eventually*] establecer una cadena a escala mundial. Las donaciones [*gifts*], legados y ofertas de servicios deben ser dirigidas al Profesor G. Spencer-Brown, Presidente, *The Sentinel Trust for Creative Education*, *18A Greville Place, London NW65JH,* a quien se le deben hacer consultas [*inquiries*] preliminares por teléfono al número: +44(0)71 624-2358, +44(0)836 313122, o +49 (0) 6221 402821.

PREFACIO A LA EDICIÓN DE 1979

[página xi]

Ha pasado una década desde que *Laws of Form* [Las Leyes de la Forma] se publicó por primera vez el 17 de abril de 1969. Su éxito ininterrumpido ha requerido una edición adicional en tapa blanda[*paperback*].

Espero que los lectores me perdonen por reiterar que se trata [*it is*] de un texto de matemáticas, no de lógica o filosofía, aunque tanto la lógica como la filosofía pueden por supuesto beneficiarse de su aplicación. [Bertrand] Russell había ya abandonado su posición logicista cuando le dio su aprobación [*endorsed*] [al libro], de lo contrario no lo habría hecho [*and would not otherwise done so*].

Porque aquí se hace plenamente visible [*it is fully apparent*] que la lógica no es, y nunca ha sido, una disciplina fundamental. Junto con la gramática y la retórica formaba el tercer soporte [*leg*] del trivio [*trivium*], y era correctamente considerada inferior a la aritmética que, con la geometría, la astronomía y la música, componían las disciplinas más rigurosas [*sterner*] del cuadrivio [*quadrivium*].

En el presente texto nos ocupamos [*consider*] de una aritmética cuya geometría no tiene todavía medida [*measure*] numérica: y por asombroso que pueda parecer, las proposiciones de la lógica, además de las de otras aplicaciones más amplias y potentes [*as well as those of wider and more powerful applications*], resultan ser plenamente [*wholly*] derivables de cálculos así construidos.

Hasta ahora, el logro más impresionante [*most striking success*], y una medida del poder del cálculo que aquí se presenta por primera vez, ha sido su reciente aplicación para probar el teorema de los cuatro colores del mapa.

Un mapa que puede colorearse con cuatro colores [*four colorable map*] se puede expresar en la aritmética de un cálculo de indicaciones de segundo orden, usando dos demarcaciones primarias [*primary marks*]. En general, *n* demarcaciones [*marks*] primarias permitirán 2^n zonas coloreadas [*markings*] para las regiones, y 2^n-1 demarcaciones para los límites [*borders*].

No cabía ya ninguna duda de que la conjetura de los cuatro colores era verdadera, desde que D. J. Spencer-Brown, empleando una versión del álgebra primaria, debidamente modificada, produjo en 1961 un algoritmo efectivo para colorear con cuatro colores cualquier mapa plano. Después de su muerte ocurrida a destiempo en 1976, me fue imposible encontrar el algoritmo entre sus papeles de matemáticas. Pude, sin embargo, con alguna dificultad, reconstruir las operaciones aritméticas en las que se basaba, y de este modo completar lo que inesperadamente resultó ser la primera prueba.

El incentivo decisivo para emprender esta tarea provino de la afirmación [*claim*] hecha por Appel, Haken y Koch ese mismo año, y a la que se dio considerable publicidad, de haber probado la conjetura usando las viejas técnicas. Por un tiempo se pensó que tal vez lo habían logrado, pero un examen pormenorizado de su material publicado reveló que habían fallado [*failed*] en establecer una proposición crucial. El método que utilizaron se basaba de hecho en el de Kempe en su famoso intento [de resolver] el problema 100 años atrás, y no parece posible, aun con los refinamientos modernos, hacerlo adecuado. Si un método conduce a serias complicaciones, como éste lo hace, la historia nos enseña que es inapropiado.

El método apropiado había sido ya por supuesto publicado aquí (véanse las pp. Xxv, 99, 100). En resumen, la solución del problema de los colores era ya posible, y así se dijo en su momento [*and claimed at the time to be so*], sólo usando los conceptos matemáticos detallados por primera vez en este texto. No pensé entonces, habiéndole dado el método al mundo, que finalmente se me requeriría que yo mismo lo aplicara al problema.

G. Spencer-Brown

Cambridge England
and San Francisco
August 1978

PREFACIO A LA PRIMERA EDICIÓN NORTEAMERICANA

[página xiii]

Aparte de los problemas usuales [*standard*] de lógica [que se ven en] la universidad, y que el cálculo publicado en este texto hace tan fáciles de resolver que no tenemos ya que preocuparnos [*trouble*] más por los mismos, quizás la cosa más significativa que desde una perspectiva [*angle*] matemática nos permite hacer [este cálculo] es usar valores complejos [*complex values*] en el álgebra de la lógica. Éstos equivalen [*are the analogs*] a los números complejos $a+b\sqrt{-1}$ en el álgebra corriente. Mi hermano y yo habíamos estado usando sus contrapartes booleanas por años antes de darnos cuenta de lo que eran realmente. Por supuesto, siendo lo que son, funcionan [*work*] perfectamente bien, pero comprensiblemente nos sentíamos un poco culpables [*a bit guilty*] por usarlos, así como los primeros matemáticos en utilizar 'raíces cuadradas de números negativos' se habían sentido culpables, porque tampoco ellos podían ver algún modo plausible de darles un respetable significado académico. A pesar de todo, estábamos completamente seguros de que debía de haber una teoría perfectamente válida [*good*] que respaldara [*would support*] nuestro uso de [esos valores], si tan solo pudiéramos concebirla.

La situación es simplementa ésta. En el álgebra corriente [*ordinary*], los valores complejos se aceptan como algo normal, y las técnicas más avanzadas serían imposible sin los mismos. En el álgebra booleana (y del mismo modo [*thus*], por ejemplo, en todos nuestros procesos de razonamiento) los desechamos [*disallow*]. Whitehead y Russell introdujeron una regla especial, que llamaron la Teoría de los Tipos, expresamente para [excluirlos]. Erróneamente [*mistakenly*] como resulta ahora. Así [*thus*], en este campo, las técnicas más avanzadas, aunque no imposibles, sencillamente [*simply*] no existen todavía. Actualmente [*at the present moment*] nos vemos constreñidos en nuestros procesos de razonamiento a hacerlo del mismo modo que se hacía en los tiempos de Aristóteles. El poeta [William] Blake quizás tuvo un atisbo [*insight*] de esto cuando en 1788 escribió que 'la razón [*reason*], o la medida [*ratio*] de todo lo que ya conocemos, no será la misma cuando sepamos más.'

Recordando la vinculación [*connection*] de Russell con la Teoría de los Tipos,

---

[página xiv]

fue con cierto temor [*trepidation*] que me le acerqué en 1967 con la prueba de que la misma era innecesaria. Para mi alivio, se mostró encantado [*delighted*]. Esa teoría, me dijo, fue la cosa más arbitraria que él y Whitehead jamás habían tenido que hacer, no era realmente una teoría, sino un expediente provisional [*stopgap*], y se sentía complacido de haber vivido lo suficiente para ver la cuestión resuelta.

Dicho de la manera más simple que puedo, la solución es como sigue. Todo lo que tenemos que mostrar es que las paradojas de la autorreferencia [*self-referential*], descartadas mediante la Teoría de los Tipos, no son peores que las paradojas similares de autorreferencia que se consideran completamente aceptables en la teoría corriente de las ecuaciones.

En lógica, la más famosa de tales paradojas se encuentra en la oración [*statement*] 'Esta oración es falsa.'

Imagínese que suponemos que una oración cae [siempre] en una de [estas] tres categorías, verdadera, falsa o sin sentido [*meaningless*], y que una oración que tiene sentido [*meaningful*] y no es verdadera, debe ser falsa, y una que no es falsa, debe ser verdadera. La oración que estamos considerando no parece carecer de sentido (algunos filósofos han sostenido [*claimed*] que no lo tiene, pero esto es fácil de refutar), de modo que la misma debe ser falsa o verdadera. Si es verdadera, entonces tiene que ser, como ella misma dice, falsa. Pero si es falsa, entonces, dado que eso es lo que ella dice, tiene que ser verdadera.

Hasta ahora no se ha advertido que tenemos una paradoja igualmente viciada en la teoría de las ecuaciones ordinarias, porque nos hemos guardado cuidadosamente de expresarlo de esa manera. Hagámoslo ahora.

Haremos suposiciones análogas a las de arriba. Supondremos que un número puede ser positivo, negativo o igual a cero. Supondremos, además, que todo número distinto de cero que no es positivo, debe ser negativo, y todo aquel que no es negativo, debe ser positivo. Consideremos ahora la ecuación

$$X^2 + 1 = 0$$

Transponiendo, tenemos

$$x^2 = -1$$ <[final página *xiv*]

[comienzo página *xv*]>

Y dividiendo ambos lados por x, nos da

$$x = -1/x$$

Podemos ver que esta expresión (al igual que la oración análoga en lógica) se refiere a si misma [*is self-referential*]: el valor de la raiz de *x* que buscamos debe ser puesto de nuevo dentro de la expresión donde lo buscamos [*put back into the expression from which we seek it*].

Una mera inspección visual nos muestra que *x* tiene que ser una forma de la unidad, o la ecuación no se equilibraría numéricamente [*would not balance numerically*]. Hemos supuesto sólo dos formas de la unidad, +1 y -1, de modo que podemos probar con cada una por turno. Hagamos $x = +1$. Esto nos da

$$+1 = -1/+1 = -1$$

que es claramente paradójico. Así que hagamos $x = -1$. Esta vez obtenemos

$$-1 = -1/-1 = +1$$

lo que resulta igualmente paradójico.

Por supuesto, como todo el mundo sabe, la paradoja en este caso se resuelve introduciendo una cuarta clase de números, llamados *imaginarios*, de modo que podemos decir que las raíces de la ecuación de arriba son +-*i*, donde *i* es una clase de unidad que consiste en la raiz cuadrada de menos uno.

Lo que hacemos en el capítulo 11 es extender este concepto a las álgebras booleanas, lo que significa que un argumento válido puede contener no sólo tres clases de oraciones, sino cuatro: verdaderas, falsas, sin sentido [*meaningless*] e imaginarias. Las implicaciones de esto en los campos de la lógica, la filosofía y las matemáticas son profundas.

Lo que resulta fascinante de los valores booleanos imaginarios, una vez que los admitimos, es la luz que aparentemente arrojan sobre nuestros conceptos de materia y tiempo. Me imagino [*I guess*] que está en la naturaleza de todos nosotros preguntarnos por qué el universo aparece precisamente en la forma que lo hace. ¿Por qué, por ejemplo, no aparece más simétrico? Bueno, <[fin de la página *xv*]

[comienzo página *xvi*]> si usted es lo suficientemente amable y paciente para acompañarme [*to bear with me*] a través del argumento según se desarrolla en el presente texto, creo que finalmente verá que, aun cuando lo comenzamos tan simétricamente como sabemos hacerlo [*we begin it as symetrically as we know how*], se vuelve, por si mismo [*of its own accord*], cada vez menos [simétrico] a medida que avanzamos.

Cambridge, Inglaterra
G. Spencer-Brown
Jueves Santo [*Maundy Thursday*] 1972 <[fin de la página *xvi*]

[comienzo página *xvii*]>

PREFACIO

La exploración sobre la que descansa este trabajo se empezó a finales de 1959. El subsiguiente registro de la misma le debe mucho, en sus etapas iniciales, a la amistad y al aliento de Lord Russell, quien fue al comienzo una de las pocas personas que pudo ver algo valioso en mi propuesta. En una etapa posterior, le debo igualmente a la generosa ayuda del Dr. J.C.P. Miller, Miembro [*fellow*] del University College y Profesor [*Lecturer*] de Matemáticas en la Universidad de Cambridge, quien no sólo leyó las sucesivas pruebas de imprenta, sino que actuó además como un guía y mentor siempre a mano, e hizo muchas sugerencias para mejorar el estilo y la exactitud [*accuracy*] tanto del texto como del contexto.

En 1963 acepté una invitación del Sr. H.G. Frost, Conferenciante de Ciencias Físicas del Cuerpo Docente [*Staff Lecturer*] del Departamento de Estudios Extra-muros [*Extra-mural Studies*] de la Universidad de Londres, para impartir un curso de conferencias [*lectures*] sobre las matemáticas de la lógica [*mathematics of logic*]. Posteriormente el curso fue extendido y se repitió anualmente en el *Institute of Computer Science* [Intituto de la Ciencia de la Computación] en la Plaza Gordon [*Gordon Square*], y de ahí surgió parte del contexto que figura en las notas y apéndices de este ensayo. Me fue posible también, con la ayuda de los alumnos de sucesivos cursos, ampliar y afinar el texto.

Muchos otros aportaron también, pero me es imposible mencionarlos a todos. Entre éstos, los editores (incluyendo sus lectores [*readers*] y sus artistas técnicos) fueron particularmente de gran ayuda, como lo fueron los impresores y, con anterioridad, la Sra. Peter Bragg, quien asumió la exigente tarea de preparar una versión mecanografiada del texto. [sigue...]>
[continuación página *xvii*]>

Finalmente, debo mencionar el hecho de que el impulso inicial para este trabajo provino del Sr. I.V. Idelson, Gerente General [*General Manager*] de *Simon-MEL Distribution Engineering,* habiendo sido las técnicas que aquí se registran desarrolladas primero no con respecto a cuestiones de lógica, sino como respuesta a ciertos problemas no resueltos en ingeniería.
Richmond, agosto de 1968.<[fin de la página *xvii*]
[comienzo página *xviii*]>*Reconocimiento*
El autor y los editores agradecen el amable [*kind*] permiso [concedido] por el Sr. J Lust de la Universidad de la Escuela de Londres de Estudios Africanos y Orientales [*University of London School of African and Oriental Studies*] para fotografiar [*photograph*] una copia facsímil del la impresión Fukien del siglo XII del Tao Tê Ching en el antiguo Museo del Palacio, Peking.>[fin de la página *xviii*][comienzo página *xix*]>

INTRODUCCIÓN

La intención principal de este ensayo es separar de la lógica, lo que se conoce como álgebras de la lógica y realinear estas últimas con las matemáticas.

Tales álgebras, comúnmente llamadas booleanas, aparecen como misteriosas porque al presente las exposiciones [*accounts*] de sus propiedades no revelan nada de interés matemático acerca de su aritmética. Toda álgebra posee una aritmética, pero Boole concibió [*designed*][1] la suya, ciertamente no para [servir] a su aritmética, [sino] para adecuarla [*fit*] a la lógica, que es una posible interpretación de su álgebra. Los autores posteriores han copiado a Boole al respecto, con el resultado de que hasta ahora nadie parece haber llevado a cabo ningún intento sostenido por elucidar y estudiar la aritmética primaria, no numérica, del álgebra de uso diario que lleva hoy el nombre de Boole.

Cuando por primera vez empecé a ver hace siete años que semejante estudio se necesitaba, me encontré así parado sobre lo que, matemáticamente hablando, era territorio virgen [*untrodden ground*]. Tenía que explorarlo en su interior para descubrir los principios que faltaban. Éstos poseen gran profundidad y belleza, como pronto veremos.

Al redactar la presente exposición [*account*] de los mismos, me he propuesto escribir de modo tal que cada término especial se encuentre ya sea definido o aclarado por su contexto. No he supuesto en el lector más que el conocimiento de la lengua inglesa, de la operación de contar, y de cómo los números se representan comúnmente. Me he tomado la libertad de escribir algo más técnicamente en esta introducción y en las notas y apéndices que siguen al texto, pero incluso aquí, puesto que el tema es de tal interés general, me he esforzado, en lo posible, por mantener mi exposición [del tema] al alcance del no especialista [en la materia].

Las exposiciones de las álgebras booleanas se han basado hasta ahora sobre conjuntos de postulados. Un postulado puede ser tomado como una oración <[fin de la página *xix*]
[comienzo página *xx*]> que se acepta sin evidencia, porque pertenece a un conjuntos de oraciones de las cuales es posible derivar otras oraciones en las cuales sucede que es conveniente creer [*which it happens to be convenient to believe*]. La principal característica que ha marcado siempre a tales oraciones ha sido una casi total ausencia de cualquier apariencia espontánea de ser verdaderas.[2] Nadie pretende, por ejemplo, que las ecuaciones de Sheffer[3] son matemáticamente evidentes, porque su evidencia no es aparente aparte de la utilidad de las ecuaciones que se siguen de las mismas. Pero en la aritmética primaria desarrollada en este ensayo, puede verse que las ecuaciones iniciales representan dos leyes de indicación muy simples que, cualquiera que sea nuestra opinión sobre la naturaleza de la autoevidencia, se insinúan al menos como afines a lo que sugiere el sentido común [*at least recommend themselves to the findings of common sense*]. Puedo así presentar (Apéndice 1), aparentemente por primera vez, pruebas de cada uno de los postulados de Sheffer y, por ende, de todos los postulados booleanos, como teoremas de un sistema axiomático que se ve que descansa sobre la base fundamental de las matemáticas [*which is seen to rest on the fundamental ground of mathematics*].

Desplegándose [*working outwards*] a partir de esta fuente [*source*] fundamental, la forma general de la comunicación matemática, como la entendemos hoy, tiende a crecer de manera completamente natural bajo la mano que la escribe. Tenemos un sistema definido, nombramos sus partes y adoptamos, en muchos casos, un único símbolo para representar cada nombre. Al hacer esto, las formas de expresión son llamadas inevitablemente según la necesidad
[sigue]...

[continuación página *xx*]>

que se tenga de las mismas [*are called inevitably out of the need for them*], y las pruebas de los teoremas, que al principio se ven ser [sólo] un poco más que una dirección relativamente informal de la atención hacia la gama completa de las posibilidades, se vuelve de manera reconocible cada vez más indirecta y formal a medida que avanzamos desde nuestra concepción original. Al llegar a mitad de camino [*at the half-way point*], se encuentra que, el álgebra en toda su completitud de representación [*in all its representative completeness*] ha surgido imperceptiblemente de la aritmética [*grown imperceptibly out of the arithmetic*], de modo que para el momento en que hemos comenzado a trabajar en la misma estamos ya plenamente familiarizados [*fully acquainted*] con sus formalidades y posibilidades sin habernos en ninguna parte puesto en marcha [*set out*] con la intención de describirlas como tales.

Uno de los méritos de esta forma de presentación es el gradual incremento [*gradual building up*] de las nociones matemáticas y de las formas comunes de procedimiento sin ninguna aparente ruptura con el sentido común. <[fin de la página *xx*] [comienzo de página *xxi*]>La disciplina de las matemáticas es considerada ser, en comparación con otras, una poderosa manera de revelar nuestro conocimiento interno [*internal*] de la estructura del mundo, y sólo de paso se la ve asociada con nuestra habilidad común de razonar y computar.

Aun así, el desarrollo ordenado de convenciones matemáticas y de formulaciones por etapas graduales [*stage by stage*] no ha dejado de tener sus problemas en el sentido contrario [*has not been without its problems on the reverse side*]. Una persona con entrenamiento matemático, que automáticamente es capaz de usar toda una gama [*a whole range*] de técnicas sin cuestionar su origen, puede encontrarse en dificultades con una parte anterior de la presentación, en la cual ha sido necesario desarrollar una idea utilizando sólo esa herramientas matemáticas según han sido ya identificadas. En algunos de estos casos necesitamos derivar un concepto para lo cual los procedimientos y técnicas ya desarrollados casi no son adecuados [*are only just adequate*]. El argumento, que es supremamente elegante en ese punto, puede así resultar ser difícil de seguir.

Un caso tal, que aparece en el Capítulo 2, es la derivación de las dos ecuaciones primitivas del cálculo de las indicaciones. Parece haber una tal universal dificultad para seguir el argumento en este punto, que lo he replanteado en una forma menos elegante en las notas sobre ese capítulo al final del texto. Cuando se ha hecho esto, se ve que el argumente es tan simple que casi resulta matemáticamente trivial. Pero debe recordarse que, de conformidad con el riguroso procedimiento que seguimos en el texto, ningún principio puede ser utilizado hasta que no ha sido introducido [*called into being*] o justificado en términos de otros principios previamente [*already*] adoptados. En este ejemplo particular, hacemos el argumento fácil usando la sustitución corriente [*ordinary*]. Pero en la etapa de este ensayo donde se vuelve necesario formular la segunda ecuación primitiva, ningún principio de sustitución ha sido introducido todavía, puesto que su uso y justificación, que posteriormente encontramos en el propio ensayo, depende en parte de la existencia de la misma ecuación que queremos establecer .

En el Apéndice 2, doy una breve explicación de algunas de las simplificaciones que pueden llevarse a cabo mediante el uso del álgebra primaria como un álgebra de la lógica. Por ejemplo, no hay proposiciones primitivas. Esto se debe [*this is because*] a que tenemos una libertad básica, no concedida a otras álgebras de la lógica, para acceder a la aritmética cuando quiera nos guste. Así cada una de las cinco implicaciones primitivas [2, pp 96-7] de Whitehead y Russell pueden ser igualadas [*equated*] matemáticamente <[fin de la página *xxi*][comienzo página *xxii*]> con una constante única [*a single constant*]. La constante, si ésta fuera una proposición, sería *las* implicaciones primitivas [*if it were a proposition, would be* the *primitive implications*]. Pero de hecho, siendo aritmética, no puede representar una proposición.

Un punto de interés en relación con esto [*in this connexion*] es el desarrollo de la idea de variable exclusivamente [*solely*] a partir de la [idea] de constante operativa. Esto proviene del hecho de que el álgebra representa nuestra capacidad [*ability*] para considerar la forma de una ecuación aritmética sin hacer caso de [*irrespective of*] de la apariencia, u otros aspectos, de esta constante en ciertos lugares especificados. Y puesto que, en la aritmética primaria, no se nos presentan, aparentemente, dos clases de constantes, tales como 5, 6, etc. y +, x, etc.,
[sigue]...

continuación página *xxii*]>

sino con expresiones que están compuestas [*made up*], aparentemente, de constantes similares cada una con una sola [*single*] propiedad, la concepción de una variable proviene de considerar la presencia o la ausencia irrelevante de esta propiedad. Esto le otorga plausibilidad a [*lends support to*] la opinión, sugerida[4] por Wittgenstein, de que en el cálculo de proposiciones las variables en realidad [*in fact*] no representan proposiciones en una expresión, sino solamente las funciones de verdad [*thruth-functions*] de esas proposiciones, puesto que las proposiciones mismas no pueden ser igualadas a la mera presencia o ausencia de una propiedad dada, mientras que su posibilidad de ser verdaderas o no verdaderas si puede serlo.

Otro punto de interés lo constituye la clara distinción que, mediante el álgebra primaria y su aritmética, se puede trazar entre la prueba de un teorema y la demostración de una consecuencia. Los conceptos de teorema y consecuencia y, por ende, de prueba y demostración, se hallan extensamente [*widely*] confundidos en la literatura actual, donde estas palabras se usan como intercambiables. Indudablemente, esto ha creado dificultades espurias. Como se verá en la enunciación [*statement*] de la completitud del álgebra primaria (teorema 17), aquello que ha de ser probado se vuelve notablemente claro cuando la distinción es mantenida en forma apropiada. (Una confusión parecida se hace evidente, especialmente en la literatura de la lógica simbólica, con respecto a los conceptos de axioma y postulado).

Es posible desarrollar el álgebra primaria en tal medida que pueda usarse como un álgebra restringida (o incluso ampliada [*full*]) de los números. Hay varias maneras de hacer esto, de las cuales la más conveniente que he encontrado es limitar la condensación <[fin de la página *xxii*][comienzo página *xxiii*]> en la aritmética, y usar así un número de cruzamientos [*crosses*] en un espacio dado para representar el número correspondiente o su imagen. Una vez que esto se ha hecho es posible ver claramente [*plainly*] parte de la evidencia [en que se apoyan] los teoremas de Gödel y Church[5][6] [sobre los métodos] de decisión. Pero con la rehabilitación de las ecuaciones paradójicas emprendida en el Capítulo 11, el significado y la aplicación de esos teoremas se encuentran ahora necesitados de una revisión. Ciertamente, los mismos aparecen menos destructivos de lo que se había supuesto hasta hoy.

Me he propuesto en el texto llevar el desarrollo sólo hasta donde pudiera razonablemente considerar de manera cabal todas las formas que emergen en cada etapa. Aunque, en el Capítulo 11, indico la expansión en formas complejas [*the expansion into complex forms*], trato por lo demás limitar el desarrollo a fin de hacer [*render*] completa la exposición hasta donde ésta llega.

La mayoría de los teoremas son originales, al menos como teoremas, y la prueba de los mismos es nueva. Pero algunos de los útimos teoremas algebraicos y mixtos, que aparecen [*occurring*] en lo que a estas alturas constituye terreno familiar [*familiar ground*], son ya conocidos y, aunque en otra forma, han sido [ya] probados anteriormente. En todos estos casos he podido encontrar lo que parecen [*seem*] ser pruebas más claras, más simples o más directas, y en la mayoría de los casos los teoremas que pruebo son más generales. Por ejemplo, la aproximación más cercana a mi teorema 26 parece [*seems*] ser un teorema más débil y menos central aparentemente probado[7] por primera vez por Quine, como un lema para una prueba de completitud de un cálculo proposicional. Fue sólo después de contemplar este teorema por varios años cuando encontré la hermosa clave [*beautiful key*] por la cual se ve que es verdadero para todas las álgebras posibles, ya sean booleanas o de otra índole.

Al arribar a las pruebas, me he sentido a menudo impresionado [*struck*] por el evidente alineamiento [*alignment*] de las matemáticas con la teoría psicoanalítica. En cada disciplina tratamos de descubrir, mediante una mezcla de contemplación, representación simbólica, comunión y comunicación, qué es lo que ya sabemos. En las matemáticas, al igual que en otras formas de autoanálisis, no tenemos que ir a explorar el mundo físico para encontrar aquello que estamos buscando. Cualquier chico de diez años, que puede multiplicar y dividir, ya sabe, por ejemplo <[fin de la página *xxiii*][comienzo página *xxiv*]> que la secuencia de los números primos es interminable [*endless*]. Pero si no se le muestra la prueba de Euclides, es improbable que alguna vez descubra, antes de morir, que ya la conocía.

Esta analogía sugiere que tenemos [una capacidad de] percatarnos directamente [*direct awareness*]de la forma de lo matemático [*mathematical form*]como una estructura arquetípica.
[sigue]...

[continuación página *xxiv*]>

En el capítulo final trato de ilustrar la naturaleza de este percatarse [*awareness*]. En todo caso, por una mera cuestión de probabibilidades nos veríamos llevados a suponer que algún grado de [capacidad] para percatarnos directamente se encuentra presente en toda la matemática.

Podemos suponer que en las matemáticas el número de oraciones que podrían ser probadas o no, es ilimitado, y es evidente que, en cualquier muestra finita de oraciones lo suficientemente grande, entre aquellas que ostentan algún grado útil de relevancia las oraciones que no son verdaderas superan considerablemente en número [*heavily outnumber*] a las verdaderas. De modo que, en principio, si no hubiera ningún sentido innato de lo que es cierto [*innate sense of rightness*], los matemáticos intentarían probar más oraciones falsas que verdaderas. Pero en la práctica, raras veces un matemático intenta probar una oración a menos que esté ya convencido de que es verdadera. Y puesto que todavía la misma no ha sido probada, semejante convicción debe surgir, en primer lugar, de consideraciones ajenas a la prueba.

De esta manera la codificación de un procedimiento de prueba, o de cualquier otro proceso directivo, aunque útil al principio, puede luego erigirse en un obstáculo [*stand as a threat*] para un progreso ulterior. Podemos considerar, por ejemplo, las limitaciones, en gran medida inconscientes, pero ahora codificadas, [a las que están sometidas] las partes de raciocinio, en tanto diferentes de las [partes] computacionales, en las estructuras de la prueba de la solución de las ecuaciones booleanas de primer grado. Como veremos en el Capítulo 11, y en las notas al mismo, la solución de ecuaciones de grados mayores no sólo es posible, sino que ha sido puesta en práctica por los ingenieros de circuitos [*switching*] sobre una base *ad hoc* por cerca de medio siglo o más. Tales ecuaciones han sido hasta ahora excluidas por la teoría de los tipos de Whitehead y Russell [2, pp 37 ss, e.g. p 77], como materia [*subject-matter*] de la lógica corriente.

En el texto muestro que podemos construir una función implícita de si misma de modo que reingresa a su propio espacio ya sea a una profundidad impar o par [*at either an odd or even depth*]. En el primer caso encontramos la posibilidad de una ecuación autocontradictoria [*self-denying*] de la clase que los autores mencionados describen. En tal caso, las raíces de la ecuación así construida [*set up*] son imaginarias. Pero en el segundo caso encontramos una ecuación que se convalida a si misma y que,<[fin de la página *xxiv*][comienzo página *xxv*]>para alguna dada configuración de las variables, es satisfecha por dos raíces reales.

Mediante estas consideraciones he podido rehabilitar[8] la estructura formal desechada por la teoría de los tipos hasta el momento. Como ahora vemos, la estructura puede ser identificada en la teoría más general de las ecuaciones, detrás de la cual ya existe el peso de toda la experiencia matemática.

Un prospecto de semejante rehabilitación, que podría merecer [*repay*] atención adicional, surge [*comes*] del hecho de que, aunque las ecuaciones booleanas de primer grado pueden ser plenamente representadas en una superficie plana, las de segundo grado no pueden representarse del mismo modo. En general, una ecuación de grado k requiere, para su representación, una superficie de género k –1. En un trabajo sin publicar emprendido en 1962-5, D.J. Spencer y yo encontramos evidencia que sugería que tanto el teorema de los cuatro colores [del mapa] como el teorema de Godbach son indecidibles con una estructura de prueba confinada a las ecuaciones booleanas de primer grado, pero eran decidibles si estábamos preparados para valernos de ecuaciones de grado superior.

Uno de los motivos que impulsó [*prompting*] la continuación del presente trabajo fue la esperanza de acercar las investigaciones sobre la estructura interna [*inner*] de nuestro conocimiento del universo, expresado en las ciencias matemáticas, y las investigaciones sobre la estructura externa [*outer*], tal como [ésta] se expresa en las ciencias físicas. Aquí la obra de Einstein, Schrödinger y otros paracen haber conducido a la comprobación [*realization*][de la existencia] de una última frontera [*boundary*] del conocimiento físico en la forma de los medios a través de los cuales lo percibimos. Se hace patente [*apparent*] que si ciertos hechos acerca de nuestra común experiencia de la percepción, o lo que podríamos llamar el mundo interior [*inside*], pudieran ser revelados mediante un estudio ampliado [*extended*] de lo que llamamos por contraste el mundo exterior [*outside*], entonces un estudio igualmente ampliado de este mundo interior revelaría, a su vez, los hechos encontrados primero en el mundo exterior: [sigue]...

[continuación página *xxv*]>

porque aquello a lo que nos acercamos en uno u otro caso [*in either case*], desde un lado o del otro, es la frontera [*boundary*] común entre ambos.

No pretendo haber llevado estas revelaciones muy lejos,<[fin de la página *xxv*][comienzo página *xxvi*]>ni que otros con mayores dotes [*better equipped*][que yo] no las podrían llevar más lejos. Espero que lo hagan. Mi intención consciente al escribir este ensayo fue la dilucidación de un cálculo indicativo, pero su potencial latente me tomó por sorpresa, habiéndoseme hecho manifiesto sólo cuando el cumplimiento [*realization*] de esa intención se hallaba bien avanzado.

En el texto, interrumpo mi exposición en el punto donde la conexión con las ideas básicas del mundo físico comienza a asomar con más fuerza, al entrar nosotros en la tercera dimensión de la representación con ecuaciones de grado superior a la unidad [*higher than unity*]. Me había propuesto, antes de empezar a escribir, dejar [el asunto] ahí [*to leave it here*], puesto que las formas latentes que emergen al llegar a este [punto], el cuarto alejamiento [*fourth departure*] de la forma primaria (o el quinto alejamiento, si contamos desde el vacío [*void*]), son tantas y tan diversas que no podía abrigar la esperanza de poder presentarlas todas, ni siquiera superficialmente, en un solo libro.

Medawar observa[9] que la forma estándar de presentación que se le exige a un artículo científico corriente representa exactamente lo opuesto de lo que el investigador estuvo de hecho haciendo. En realidad, dice Medawar, la hipótesis se postula primero, y se convierte en el medio por el cual [*through which*] ciertos hechos, a ser recolectados más tarde en apoyo de la misma, y que de no ser por ésta serían oscuros, son vistos claramente por primera vez. Pero se espera que la exposición a través del artículo dé la impresión de que tales hechos fueron los que primero sugirieron la hipótesis, sin hacer caso de [*irrespective of*] si esta impresión es verdaderamente representativa [de lo que realmente ocurrió].

En las matemáticas este proceso lo vemos a la inversa. El matemático, con mayor frecuencia de la que generalmente le es dado admitir, procede por vía de experimento, inventando y ensayando [*trying out*] hipótesis para ver si las mismas se adecúan [*fit*] a los hechos de raciocinio y cómputo que se le presentan [*with which he is presented*]. Cuando ha encontrado una hipótesis que cuadra [*fits*], se espera que publique una exposición del trabajo en el orden inverso, de modo que los hechos sean deducidos de la hipótesis.

Ciertamente, no recomendaría que hiciéramos lo contrario en uno u otro campo [*in either field*]. En todo sentido [*by all accounts*], contar la historia al revés de cómo ocurrió [*backwards*] es conveniente y ahorra tiempo. Pero pretender que la historia fue realmente vivida así [*lived backwards*] puede ser extremadamente mistificador.

En vista de esta evidente inversión [del orden en que suceden las cosas], Laing sugiere[10] que lo que<[fin de la página *xxvi*][comienzo página *xxvii*]> en las ciencias empíricas se llaman *datos* [*data*], habiendo sido en un sentido real *arbitrariamente* escogidos por la naturaleza de la hipótesis concebida [*formed*], podrían ser llamados más honestamente *capturados* [*capta*]. Por analogía inversa, los hechos de la ciencia matemática, que al principio parecen ser arbitrariamente escogidos, y por ende, *capturados* [*capta*], no son en nada [*at all*] realmente arbitrarios, sino [que están] absolutamente determinados por la naturaleza y la coherencia de nuestro ser. Dentro de esta concepción [*view*] podríamos considerar que los hechos de las matemáticas son los *datos* [*data*] reales de la experiencia, porque sólo éstos, en un último análisis, parecen ser ineludibles [*inescapable*].

Aunque me he comprometido [*undertaken*], lo mejor que he podido, a preservar dentro del texto lo que resulta así ineludible, y por lo mismo, intemporal [*timeless*], y a desechar, por el contrario [*otherwise*], lo que es temporal, no me hago ninguna ilusión de haber tenido éxito por completo en ninguno de estos aspectos [*on either count*]. Que uno *no* puede, en semejante empresa [*undertaking*] tener éxito perfectamente, me parece a mí que radica [*reside*] en la manifiesta imperfección del estado de *existencia particular*, en cualquier forma en absoluto [*in any form at all*]. (Cf Apéndice 2) La obra de cualquier autor humano tiene que ser hasta cierto punto idiosincrática, aun cuando éste pueda saber que su ego personal no es más que un traje [*garb*] a la moda para adaptarse [*suit*] a los modos [*mode*] del presente más que [*rather than*] a lo perdurable [*mean*] del pasado y del futuro en el que su obra completará su recorrido [*will come to rest*]. [sigue]...
[continuación página *xxvii*]>

Hasta este punto, el modo [efímero] o la moda es inevitable a costa de lo perdurable [*mean*] o el sentido [*meaning*], o no puede haber ninguna conexión [*there can be no connexion*] [entre] aquello que es periférico [*peripheral*], y tiene que ser observado [*has to be regarded*], y lo que es central, y tiene que ser adivinado [*divined*].

Un aspecto importante del lenguaje de las matemáticas es su grado de formalidad. Aunque es cierto que, en las matemáticas, nos preocupamos por expresar lo que se dice a través de una suerte de taquigrafía [*shorthand*], esto constituye sólo la mitad de la historia. Lo que perseguimos [*aim*], adicionalmente, es presentar [*provide*] la forma más general en la que se ve que descansa [*is seen to rest*] el lenguaje corriente sobre la experiencia. En tanto [*as long as*] nos limitamos [*confine ourselves*] a la materia que estamos tratando [*the subject at hand*], sin extender nuestras consideraciones a lo que ésta tiene en común con otras materias, no estamos sacando provecho [*we are not availing ourselves*] de un modo de presentación verdaderamente matemático.

Lo que las matemáticas encierran [*what is encompassed in*] es una superación [*a transcedence*] de un estado de visión [para llegar] a una nueva visión, hasta ahora no patente [*hitherto unapparent*], más allá de la anterior. Cuando la existencia presente ha dejado de tener sentido, puede todavía volver a tenerlo [*can still come to sense again*] a través de la toma de conciencia [*realization*] de su forma.<[fin de la página *xxvii*][comienzo página *xxviii*]>

De este modo [*thus*] el tema [*subject*] de la lógica, no importa cuán simbólicamente sea tratado, en tanto se confina a si mismo en el ámbito [*ground*] de la lógica, no es un estudio matemático. Se vuelve matemático sólo cuando podemos percibir su fundamento [*ground*] como parte de una forma más general, en un proceso que nunca acaba [*without end*]. Su tratamiento matemático es el tratamiento de la forma en que nuestra manera de hablar acerca de nuestra experiencia vivida de todos los días [*ordinary*] puede verse que se construye [*can be seen to be cradled*]. Son las leyes de esta forma, más que las de la lógica, las que he intentado registrar [*record*].

Al llevar a cabo este intento, encontré más fácil lograr [*acquire*] un acceso a las leyes mismas que definir [*determine*] una manera satisfactoria de comunicarlas. En general, mientras más universal es la ley, más parece resistirse a dejarse expresar de algún modo particular.

Algunas de las dificultades que se hacen patentes al leer, así como al escribir, la parte inicial [*earlier*] del texto proviene del hecho de que desde el Capítulo 5 hacia atrás [*backwards*], estamos extendiendo el análisis más allá del punto de simplicidad donde el lenguaje deja de obrar como una moneda para la comunicación. El punto en el cual esta ruptura con el uso normal ocurre es de hecho aquel donde las algebras comúnmente se supone que comienzan. Extenderlas hacia atrás, yendo más allá de este punto, exige [*demands*] un considerable desaprendizaje [*unlearning*] de la actual superestructura descriptiva que, hasta que es desaprendida [*unlearned*], puede ser erróneamente tomada por [*mistaken for*] la realidad.

El hecho de que, en un libro, tenemos que usar palabras y otros símbolos en un intento por expresar lo que el uso de palabras y otros símbolos ha hasta el momento oscurecido, tiende a imponer exigencias de una naturaleza extraordinaria tanto sobre el escritor como sobre el lector, y estoy consciente, por mi parte, de cuán imperfectamente he tenido éxito en ponerme a la altura de las mismas. Pero al menos, en el proceso de emprender la tarea, me he percatado [*I have become aware*] (como el propio Boole se percató) de que lo que estoy tratando de decir no tiene nada que ver conmigo, o con ningún otro ser humano, al nivel personal. Es algo, por así decirlo, que se registra a si mismo [*records itself*] y, cualesquiera que sean las fallas del registro [*whatever the faults in the record*], *aquello que* es de este modo registrado no es un asunto de opinión [*is not a matter of opinion*]. El único reconocimiento [*credit*] que me siento con derecho a aceptar al respecto es por la labor instrumental de realizar un registro que, si Dios así lo dispone, resulte ser lo suficientemente articulado y coherente para ser entendido en su contexto temporal.

Londres, agosto de 1967 <[fin de la página *xxviii*]

Notas al pie
(páginas *xix* a *xxvi*)

[1] George Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, 1847 [Análisis Matemático de la Lógica]
[2] Cf Alfred North Whitehead and Betrand Russell, *Principia Mathematica*, Vol. I. 2da. Edición, Cambridge, 1927, p v.
[3] Henry Maurice Sheffer, *Transactions of the American Mathematical Society*, 14 (1913) 481-8.
[4] Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Londres, 1922, proposiciones 5 y ss.
[5] Kurt Gödel, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931) 172-98.
[6] Alonzo Church, *Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936) 40-1, 101-2.
[7] W. V. Quine, *Journal of Symbolic Logic*, 3 (1938) 37-40.
[8] Para una historia de los intentos iniciales [*earlier essays*] por rehabilitar lo que había sido desechado [*discarded*], sobre una base lógica más que matemática, véase Abraham A. Fraenkel y Yeoshua Bar-Hillel, *Foundations of set theory* [Fundamentos de la teoría de conjuntos], Amsterdam, 1958, pp. 136-95.
[9] P. B. Medawar, "Is the Scientific Paper a Fraud?" [¿Es un Fraude el Artículo Científico?], *The Listener*, 12 de septiembre de 1963, pp. 377-8.
[10] R. D. Laing, *The politics of experience and the bird of paradise* [La política de la experiencia y el ave del paraíso], Londres, 1967, pp. 52 y ss.

[comienzo página *xxix*]>

UNA NOTA SOBRE EL ENFOQUE [*approach*] MATEMÁTICO

El tema de este libro es que un universo comienza a existir [*comes into being*] cuando un espacio es escindido [*severed*] o dividido en sus partes [*taken apart*]. La piel de un organismo viviente separa [*cuts off*] lo exterior [*an outside*] de lo interior [*an inside*]. Lo mismo hace la circunferencia de un círculo en el plano. Examinando [*tracing*] la manera en que nos representamos semejante escisión [*severance*], podemos empezar a reconstruir, con una precisión [*accuracy*] y un alcance [*coverage*] que parecen casi misteriosos [*uncanny*], las formas básicas que subyacen [*underlying*] en la ciencias de la lingüística, las matemáticas, la física y la biología, y podemos empezar a ver cómo las leyes de nuestra propia experiencia que nos resultan familiares [*the familiar laws of our own experience*] se desprenden [*follow*] inexorablemente del acto original de escisión. El acto mismo ya se recuerda [*the act is itself already remembered*], aun sea inconscientemente, como nuestro primer intento por distinguir cosas diferentes en un mundo donde, en primer lugar, los límites [*boundaries*] pueden trazarse dondequiera nos guste [*anywhere we please*]. En esta etapa el universo no puede ser distinguido de la manera en que actuamos sobre el mismo [*from how we act upon it*], y el mundo puede parecer semejante a arena movediza bajo nuestros pies.

Aunque todas las formas y, por ende, todos los universos, son posibles y cualquier forma particular es mutable, se hace evidente que las leyes que relacionan tales formas son las mismas en cualquier universo. Es esta identidad [*sameness*], la idea de que podemos encontrar una realidad que es independiente de la manera en que el universo en efecto [*actually*] aparece [*appears*], lo que hace tan fascinante el estudio de las matemáticas. La idea de que las matemáticas, en común con otras formas del arte, nos pueden conducir más allá de la existencia ordinaria, y nos pueden mostrar algo de la estructura en la que toda creación encaja como un todo coherente [*hang together*], no es nada nuevo. Pero los textos de matemáticas generalmente comienzan la historia en algún punto a mitad de camino, dejando que sea el lector quien retome [*pick up*] el hilo lo mejor que pueda. Aquí la historia es contada [*traced*] desde el principio.

A diferencia de otras formas más superficiales de destreza [*expertise*], las matemáticas constituyen una manera de decir cada vez menos sobre cada vez más. De este modo, un texto de matemáticas no es un fin en si mismo, si no la llave [*key*] para un mundo más allá del ámbito de la descripción corriente [de las cosas].

Una exploración inicial de un mundo semejante, habitualmente se emprende en la compañía de un guía experimentado. Emprenderla solo , <[fin de la página *xxix*][comienzo página *xxx*]> aunque no es imposible, es tal vez tan difícil como ingresar al mundo de la música intentando leer, sin la guía de ninguna otra persona, las partituras de un gran maestro, o como tratar de volar solo en un avión por primera vez sin más preparación que el estudio del manual del piloto. [sigue]...

[continuación página *xxx*]

Aunque las notas al final del texto pueden hasta cierto punto compensar la falta de ese guía personal, no pueden reemplazarlo efectivamente. Estas notas han sido concebidas para ser leídas conjuntamente con el texto, pero puede de hecho ser incluso de ayuda leerlas primero.

El lector que se encuentra ya familiarizado con la lógica, ya sea en su forma tradicional o simbólica, puede hacer bien en comenzr con el Apéndice 2, refiriéndose al texto a través del Índice de Formas cada vez que sea necesario.<[fin de la página *xxx*]

[comienzo página 1]>

1 – LA FORMA

Tomamos como [ya] dadas la idea de distinción y la idea de indicación, y que no podemos hacer una indicación sin trazar [draw] una distinción. Por consiguiente, tomamos la forma de distinción por/como la forma.

Definición

Distinción es perfecta continencia.

Es decir, una distinción se traza estableciendo [*by arranging*] un límite [*a boundary*] con lados separados de modo que un punto [que se encuentra] en

[*on*] un lado no puede alcanzar [*reach*] el otro lado sin cruzar el límite. Por ejemplo, en un espacio plano un círculo traza una distinción.

Una vez que una distinción es trazada, los espacios, estados, o contenidos que se encuentran en cada lado del límite, siendo distintos, pueden ser indicados.

No puede haber ninguna distinción sin motivo, y no puede haber ningún motivo a menos [*unless*] que se vea que los contenidos difieren en valor.

Si un contenido es de valor, puede tomarse un nombre para indicar este valor.

Así el llamar [*the calling*] del nombre puede identificarse con el valor del contenido.

Axiom 1. La ley del llamar

El valor de un llamado [call] *hecho otra vez es el valor del llamado.*

Es decir, si un nombre es llamado [*if a name is called*] y luego es llamado de nuevo, el valor indicado por los dos llamados tomados conjuntamente es el valor indicado por uno de los dos.

Esto es, para cualquier nombre, volver a llamar es [igual a] llamar.

Igualmente, si el contenido es de valor, un motivo o una intención o instrucción de cruzar [*cross*] el límite hasta [*into*] el contenido puede considerarse [*can be taken*] que indica este valor.

De este modo [*thus*], el cruce [*crossing*] del límite puede identificarse con el valor del contenido.

Axioma 2. La ley del cruce

El valor de un cruce [crossing] *hecho otra vez no es el valor del cruce.*

Es decir, si se tiene la intención [*if it is intended*] de cruzar un límite y luego se tiene la intención de volver a cruzarlo, el valor indicado por las dos intenciones tomadas conjuntamente es el valor que no indican ninguna de las dos [*is the value indicated by none of them*].

Es decir, para cualquier límite, volverlo a cruzar [*to recross*] es [igual a] no cruzar.<[fin de la página 2][comienzo de página 3]>

Capítulo 2- FORMAS EXTRAÍDAS [*taken out*] DE LA FORMA

Construcción

Trace una distinción.

Contenido

Llámela la primera distinción.

Al espacio en que está trazada, llámelo el espacio escindido [*severed*] o segmentado [*cloven*] por la distinción.

A las partes del espacio configurado [*shaped*] por la escisión o segmentación llámelas los lados de la distinción o, alternativamente, los espacios, estados o contenidos distinguidos por la distinción.

Intención

Tómese cualquier marca, [*mark*] seña [*token*] o signo [*sign*] con o con respecto a la distinción, como una señal [*signal*].

Llámese al uso de cualquier señal, su intención [*intent*].

Primer canon. Convención de la intención

Limítese la intención de una señal al uso que le está permitido a la misma.

Llámese a esto la convención de la intención. En general, *lo que no está permitido, está prohibido.*<[fin de la página 3]

[comienzo página 4]

Conocimiento

Sea un estado distinguido por la distinción, marcado con una marca [ ]
de distinción.

Sea el estado conocido por la marca.

Llámese al estado el estado marcado [*the marked state*].

Forma

Llámese al espacio dividido [*cloven*] por cualquier distinción, junto con el contenido completo [*entire*] del espacio, la forma de la distinción.

Llámese, a la forma de la primera distinción, la forma.

Nombre

Sea una forma distinta de la forma [*Let there be a form distinct from the form*].

Desde [*from*] la forma, cópiese [*be copied out*] la marca de distinción dentro [*into*] de esa [*such*] otra forma.

A cualquier copia tal de la marca [*mark*], llámesela una huella [*token*] de la marca.

Sea cualquier huella de la marca llamada como un nombre del estado marcado.

Deje que el nombre indique el estado [*Let the name indicate the state*].

Arreglo [*arrangement*]

Llámese un arreglo [*an arrangement*] a la forma [*form*] de un número de huellas [*tokens*] consideradas las unas con respecto de las otras (esto es, consideradas en la misma forma).

Expresión

Llámese una expresión a cualquier arreglo concebido [*intended*] como un indicador [*indicator*].<[fin de la página 4][comienzo de página 5]>

Valor

Al estado indicado por una expresión, llámeselo el valor de la expresión.

Equivalencia

Llámense equivalentes a las expresiones del mismo valor.

Escríbase un signo de equivalencia

[=]

entre expresiones equivalentes.

Ahora, por el axioma 1,

¬ ¬ = ¬ .

Llámese a esto la forma de la condensación.

Instrucción

Al estado no marcado con la marca, llámeselo el estado sin marcar [*unmarked state*].

Véase cada huella de la marca dividir [*cleave*] el espacio dentro del cual es copiado. Es decir, sea cada huella una distinción en su propia forma.

Llámese al lado cóncavo [*concave*] de una huella, su interior [*its inside*].

Concíbase cualquier huella [*let any token be intended*] como una instrucción de cruzar el límite de la primera distinción.

Sea el cruce [*crossing*] desde [*from*] el estado indicado en el interior de la huella.

Sea el cruce hacia [*to*] el estado indicado por la huella.

Deje que un espacio sin ninguna huella [*let a space with no token*] indique el estado sin marcar [*the unmarked state*].

Ahora, por el axioma 2,

[ ]

Llámese a esto la forma de la cancelación.<[fin de la página 5][comienzo de página 6]>

Ecuación

A una indicación de expresiones equivalentes, llámesela una ecuación.

Ecuación primitiva [*Primitive equation*]

Llámese a la forma de la condensación una ecuación primitiva.

Llámese a la forma de la cancelación una ecuación primitiva.

Ninguna otra ecuación es primitiva [*Let there be no other primitive equation*].

[continuación página 6]>

Expresión simple

Nótese que las tres formas de arreglo, [ ], y la de ausencia de forma, [ ], tomadas de las ecuaciones primitivas, son todas expresiones, por convención.

Llámese simple a cualquier expresión que consiste de una huella [*token*] vacía.

Llámese simple a cualquier expresión que consiste de un espacio vacío [*empty*].

Ninguna otra expresión es simple [*Let there be no other simple expression*].

Operación

Vemos ahora que si un estado puede [*can*] ser indicado usando una huella como nombre, entonces puede [*can*] ser indicado usando la huella como una instrucción sujeta a la convención. Cualquier huella puede, por consiguiente, tomarse como una instrucción para la operación de una intención, y puede [*may*] serle dado a si misma el nombre [*may itself be given a name*]

cruce [*cross*]

para indicar cuál es la intención.

Relación

Habiendo decidido que la forma de cada huella llamada cruce ha de ser perfectamente continente [*continent*], hemos permitido sólo una clase de relación entre cruces [*crosses*]: continencia [*continence*].<[fin de la página 6][comienzo página 7]>

Restrínjase la intención [*intent*] de esta relación de modo que un cruce se dice que contiene [*contain*] lo que está en su interior [*inside*] y no contiene lo que no está en su interior.

Profundidad [*depth*]

En un arreglo *a* que se encuentra en [*standing in*] un espacio *s*, al número *n* de cruces [*crosses*] que tienen que cruzarse [*that must be crossed*] para llegar [*reach*] desde *s* a un espacio s_n, llámeselo la profundidad de s_n con respecto a *s*.

Al espacio a que llegó el mayor [*the greatest*] número de cruces hacia dentro [*inwards crosses*] desde *s*, llámeselo el espacio más profundo en *a*.

Al espacio al que no ha llegado ningún cruce [*the space reached by no crossing*], llámeselo el espacio más superficial [*the shallowest*] en *a*.

Así

$$s_0 = s$$

De cualquier cruce que se encuentre en cualquier espacio en un cruce *c*, dígase que está contenido en *c*.

De cualquier cruce que se encuentre en el espacio más superficial en *c*, dígase que se encuentra bajo *c*, o que está cubierto por *c*.

Cruce no escrito [*unwritten cross*]

Supóngase que cualquier s_0 está rodeado por un cruce no escrito.

A los cruces que se encuentran bajo cualquier cruce *c*, escrito o no escrito, llámeselos los cruces impregnados [*pervaded*] por el espacio más superficial en *c*.

Espacio impregnado [*pervasive space*]

De cualquier espacio dado s_n, dígase que impregna [*pervade*] cualquier arreglo en el que s_n sea el espacio más superficial.

Al espacio *s* que impregna un arreglo *a*, sea o no *a* el único arreglo impregnado por *s*, llámeselo el espacio impregnado de *a*.<[fin de la página 7] [comienzo de la página 8]>

Capítulo 3- LA CONCEPCIÓN DE LA CALCULACIÓN [*calculation*]

Segundo canon. La contracción de la referencia

1 Construya un cruce [*construct a cross*].
2 Márquelo con *c*.
3 Sea *c* su nombre.
4 Deje que el nombre indique el cruce.

Sean los cuatro mandatos [*injunctions*] de arriba (dos de intención constructiva, dos de intención convencional [*conventional intent*]) contraídos [*contracted*] en el único mandato de abajo (de intención mixta [*mixed*]).

[continuación página 8]

1 Tome cualquier cruce *c*.

En general, *contráigase cualquier mandato hasta cualquier grado en que el mismo pueda ser todavía seguido.*

Tercer canon. Convención de sustitución

En cualquier expresión, cámbiese cualquier arreglo por un arreglo equivalente.

Paso [*step*]

Llámese un paso a cualquier cambio tal.

Represéntense mediante un signo

[ ]

las palabras

se cambia a [*is changad to*]

Deje que una punta [*barb*] en el signo indique la dirección del cambio.

[fin de la página 8]

[comienzo de la página 9]

Dirección

Un paso puede ahora considerarse no sólo con respecto a su clase [*kind*], como en

[ ]

más bien que

[ ]

sino también con respecto a su dirección, como en

[ ]

antes que

[ ]

Cuarto canon. Hipótesis de simplificación

Supóngase que el valor de un arreglo sea el valor de una expresión simple a la cual dicho arreglo pueda ser cambiado dando pasos.

Ejemplo. Para encontrar un valor del arreglo

[ ]

tómense los pasos simplificadores

[ ] condensación

[ ] cancelación

para cambiarla por una expresión simple. Ahora, por la hipótesis de simplificación, su valor se supone que sea el estado marcado [*the marked state*]. [fin de la página 9] [comienzo de página 10]

Así se puede suponer el valor de cualquier arreglo si éste puede simplificarse. Pero es evidente que algunos arreglos pueden simplificarse en más de una manera, y es concebible que otros no puedan ser simplificados en absoluto. Por lo tanto, para mostrar que la hipótesis de simplificación es un útil determinante del valor necesitaremos mostrar, en algún momento [*at some stage*], que cualquier arreglo dado se simplificará [*will simplify*] y que todos los procedimientos posibles para simplificarlo llevarán a una idéntica expresión simple.

Quinto canon. Expansión de la referencia

Los nombres usados hasta ahora para [designar] las ecuaciones primitivas sugieren pasos en la dirección de la simplicidad, pero [*and*] [tal como están] [*so*] no resultan completamente adecuadas para que en efecto puedan darse pasos en una u otra dirección [*for steps which may in fact be taken in either direction*] Por consiguiente, expandimos la forma de referencia.

condensación [ ]

número

confirmación [ ]

cancelación [ ]

orden

compensación [ ]

En general, una contracción de la referencia acompaña una expansión de la claridad [*awareness*], y una expansión de la referencia acompaña una contracción de la claridad. Si lo que se hizo a través de la claridad ha de hacerse mediante regla, las formas de referencia tienen que crecer (es decir, dividirse) para darle cabida [*accommodate*] a las reglas

[continuación página 10]>

Al igual que la contracción de la referenca, de la cual es una imagen, la expansión de la referencia se da [*occurs*], originalmente, de manera espontánea [*of its own accord*]. Al principio, podría, por lo tanto, parecer un procedimento extraño introducir [*call into being*] una regla que la permita. Pero vemos, si nos fijamos [*if we consider it*], que tenemos que invocar [*call*] una regla para cualquier proceso que ocurra [*happens*] espontáneamente, a fin de salvar la convención de la intención.

Así, en general, *sea cualquier forma de la referencia divisible sin límite*.<[fin de la página 10][comienzo de la página 11]>

Calculación

Llámese calculación [*calculation*] a un procedimiento por el cual, como consecuencia de pasos, una forma se cambia por otra, y llámese un cálculo [*calculus*] a un sistema de construcciones y convenciones que permite la calculación.

Inicio [*initial*]

Las formas de paso [*forms of step*] permitidas en un cálculo se pueden definir como todas las formas que pueden verse en un conjunto dado de ecuaciones. A la ecuaciones usadas de este modo [*so used*] para determinar estas formas, llámeselas las ecuaciones iniciales, o los inicios [*initials*] del cálculo.

El cálculo [*calculus*] **de indicaciones**

Llámese cálculo de indicaciones al cálculo determinado al tomarse las dos ecuaciones primitivas

[ ]

como inicios [*as initials*].

Llámese la aritmética primaria, al cálculo limitado a las formas generadas a partir de [*from*] las consecuencias directas de esos inicios.<[fin de la página 11]

[comienzo página 12]>

Capítulo 4 - LA ARITMÉTICA PRIMARIA

Inicio 1. Número

condensar

[ ]

confirmar

Inicio 2. Orden

cancelar

[ ]

compensar

Procederemos a distinguir configuraciones [*patterns*] generales, llamadas teoremas, que pueden verse cuando estos inicios son considerados formalmente [*which can be seen through formal considerations of these initials*].

Teorema 1. Forma

La forma de cualquier número cardinal finito de cruces [crosses] *puede tomarse como la forma de una expresión.*

Es decir, cualquier arreglo concebible de cualquier número entero de cruces puede construirse a partir de una expresión simple mediante los pasos iniciales del cálculo.

Podemos probar este teorema encontrando un procedimiento de simplificación: ya que lo que puede ser reducido a una expresión simple puede ser construido a partir de la misma desandando lo pasos [dados].

Prueba

Tómese cualquier arreglo a en un espacio s.

Procedimiento. Encuéntrese cualquier espacio que sea el más profundo en a. Se puede encontrar con una búsqueda finita puesto que en cualquier a dado el número de cruces, y por ende, el número de espacios, es finito. <[fin de la página 12][comienzo página 13]>

Llámeselo el espacio s_d.

Ahora bien, s_d está contenido en un cruce o no está contenido en un cruce.

Si s_d no está contenido en un cruce, entonces s_d es s y no hay ningún cruce en s, y así a ya es simple.

Si s_d está en un cruce c_d, entonces c_d está vacío, puesto que si c_d no estuviera vacío s_d no sería el más profundo [*deepest*].

Ahora, c_d se encuentra [*stands*] solo [*alone*] en s o no se encuentra solo en s.

Si c_d se encuentra solo en s, entonces a ya es simple.

Si c_d no se encuentra solo en s, entonces c_d tiene que encontrarse ya sea [*either*]

(caso 1) en un espacio junto con otro cruce vacío (si el otro cruce no fuera vacío c_d no sería el más profundo), o

(caso 2) solo en el espacio bajo [*under*] otro cruce.

Caso 1. En este caso c_d se condensa con el otro cruce vacío. De este modo, se elimina un cruce de a.

Caso 2. En este caso c_d se cancela con el otro cruce. Así, se eliminan dos cruces de a.

Ahora, puesto que cada repetición del procedimiento utilizado en el *caso 1* o en el *caso 2* (es decir, el procedimiento para un arreglo que no es simple) desemboca en [*results in*] un nuevo arreglo con uno o dos cruces menos, llegará un momento en que, después de un número finito de repeticiones, *a* habrá sido ya sea reducido a un cruce o eliminado completamente.

Así, en cualquier caso, *a* es simplificado.

Por lo tanto, la forma de cualquier número cardinal finito de cruces puede tomarse como la forma de una expresión.

Teorema 2. Contenido

Si cualquier espacio impregna [pervades] *un cruce vacío, el valor indicado en el espacio es el estado marcado.*<[fin de la página 13][comienzo página 14]>

Prueba

Considérese un expresión que consista de una parte *p* en un espacio con un cruce vacío c_e. Se requiere probar que en cualquier caso

$$pc_e \ = \ c_e.$$

[continuación página 14]>

Procedimiento. Simplifíquese *p*.

Si el procedimiento reduce *p* a un cruce vacío, entonces el cruce vacío se condensa con c_e y queda [*remains*] únicamente c_e.

Si el procedimiento elimina *p*, entonces sólo queda c_e.

Por esto, la simplificación de cada forma de pc_e es c_e.

Pero c_e indica el estado marcado.

Por consiguiente, si cualquier espacio impregna [*pervades*] un cruce vacío, el valor indicado en el espacio es el estado marcado.

Teorema 3. Concordancia [*agreement*]

La simplificación de una expresión es única.

Es decir si una expresión *e* se simplifica hasta una expresión simple e_s, entonces *e* no se puede simplificar hasta una expresión simple que no sea e_s.

Al simplificar una expresión, podemos hacer una selección de los pasos. Así el acto de simplificar no puede ser un determinante único del valor a menos que podamos encontrar en éste una forma independiente de esa selección.

Ahora, es claro que, para algunas expresiones, la hipótesis de la simplificación proporciona [*provide*] un determinante único del valor, y procederemos a aprovechar [*use*] este hecho para mostrar que proporciona tal determinante para todas las expresiones.

Sea *m* cualquier número, mayor que cero, de tales expresiones que indican el estado marcado.

Sea *n* cualquier número de expresiones tales que indican el estado sin marcar [*unmarked state*].<[fin de la página 14][comienzo página 15]>

Por el axioma 1

$$mm \ = \ m$$

y

$$nn \ = \ n$$

y por simplificación o el uso del teorema 2,

$$mn \ = \ m.$$

Al valor de *m* llámeselo un valor dominante, y al valor de *n* llámeselo un valor recesivo.

Estas definiciones y consideraciones pueden ahora resumirse en la siguiente regla.

Sexto canon. Regla de la dominación [*dominance*]

Si una expresión e en un espacio s muestra un valor dominante en s, entonces el valor de e es el estado marcado. De lo contrario [otherwise], *el valor de e es el estado sin marcar.*

También, por definición,

(i) m = ¬ y

(ii) n =

de modo que [ ] (i),
cancelación,
(ii)

y [ ] (i),
(ii).

Prueba del teorema 3

Sea *e* en el espacio s_0. <[fin de la página 15][comienzo página 16]>

Procedimiento. Cuente el número de cruzamientos [*crossings*] desde s_0 hasta [*to*] el espacio más profundo en *e*. Si el número es *d*, llame s_d al espacio más profundo.

Por definición, lo cruces que cubren a s_d están vacíos, y son los únicos contenidos de s_{d-1}.

Estando vacíos, puede verse que cada cruce en s_{d-1} indica solamente el estado marcado, y así la hipótesis de la simplificación determina de un modo único su valor.

1 Hágase una marca *m* en el exterior de cada cruce en s_{d-1}.

Sabemos por (i) que

m = ¬

Así ningún valor en s_{d-1} es alterado [*changed*], puesto que [*since*]

[ ] procedimiento
= ¬¬ (i)
= ¬ condensación.

Por consiguiente, el valor de *e* no es alterado [*is unchanged*]
[continuación página 16]>

2 Luego considere los cruces en s_{d-2}.

Cualquier cruce en s_{d-2} está ya sea vacío o cubre uno o más cruces ya marcados con *m*.

Si está vacío, márquelo con *m* de modo que se aplican las consideraciones [hechas] en *1*.

Si cubre una marca *m*, márquelo con *n*.

Sabemos por (ii) que

n =

Así ningún valor en s_{d-2} es alterado [*is changed*].

Por consiguiente, el valor de *e* está inalterado [*is unchanged*].<[fin de la página 16]
[comienzo página 17]>

3 Considere los cruces en s_{d-3}.

Cualquier cruce en s_{d-3} está ya sea vacío o cubre uno o más cruces ya marcados con *m* o *n*.

Si no cubre una marca *m*, márquelo con *m*.

Si cubre una marca *m*, márquelo con *n*.

En uno u otro caso [*in either case*], por las consideraciones [hechas] en *1* y *2*, ningún valor en s_{d-3} es alterado, así que el valor de *e* está inalterado.

El procedimiento en los espacios subsiguientes hasta s_0 no requiere ninguna consideración adicional.

De esta manera, mediante el procedimiento, cada cruce en *e* es marcado únicamente [*uniquely*] con *m* o con *n*.

Por consiguiente, por la regla de dominación, queda determinado para *e* un valor único en s_0. [*a unique value of* e *in* s_0 *is determined*]

Pero el procedimiento deja el valor de *e* inalterado, y las reglas del procedimiento son tomadas de las reglas de simplificación.

Por lo tanto, el valor de *e* determinado por el procedimiento es el mismo que el valor de *e* determinado mediante simplificación.

Pero *e* puede ser cualquier expresión.

En consecuencia, la simplificación de una expresión es única.

Ilustración. Sea *e*

[ ].

El espacio más profundo en *e* es s_4, de modo que marque cruces primero en s_3

[ ]

luego en s_2

[ ]<[fin de la página 17][comienzo página 18]>

Luego en s_1

[ ]

y finalmente en s_0.

[ ].

Hay un valor dominante en s_0.

Por consiguiente,

$$e = m = \neg$$

Verifique [*check*] mediante simplificación

[ ]

[ ] condensación

[ ] cancelación

(cinco veces).

Hemos mostrado que los indicadores de los dos valores en el cálculo se mantienen [*remain*] distintos cuando damos pasos hacia la simplicidad justificando de este modo la hipótesis de la simplificación. Para la completitud debemos mostrar ahora que permanecen [*remain*] similarmente distintos cuando damos pasos alejándonos de la simplicidad.

Teorema 4. Distinción

El valor de cualquier expresión que se construye dando pasos a partir de una dada expresión simple es distinto del valor de cualquier expresión construida mediante pasos dados desde una expresión simple diferente.

Prueba

Considérese cualquier expresión compleja e_c construida como una consecuencia de pasos a partir [*from*] de una expresión simple e_s.<[fin de la página 18][comienzo página 19]>

Puesto que cada paso en la construcción de e_c puede ser desandado [*retraced*], existe una simplificación de e_c que lleva [*leads*] a e_s.

Pero, por el teorema 3, todas las simplificaciones de e_c coinciden [*agree*]. Por ende, todas las simplificaciones de e_c llevan a e_s.

Así, por la hipótesis de la simplificación, el uso de la cual queda justificado en la prueba del teorema 3, el único valor posible de e_c es el valor de e_s.

Pero e_s tiene que ser [*must be*] una de las expresiones simples ¬ o ,
que por definición tienen valores distintos.

Por lo tanto, el valor de cualquier expresión que se construye dando pasos a partir de una dada expresión simple es distinto del valor de cualquier expresión construida mediante pasos dados desde una expresión simple diferente.

Consistencia

Hemos mostrado ahora que los dos valores que las formas del cálculo se proponen indicar [*are intended to indicate*] no son confundidos por ningún paso permitido en el cálculo y que, por consiguiente, el cálculo en efecto [*in fact*] cumple [*does carry out*] su intención.

Si, en un cálculo que se propone [hacer] varias indicaciones, éstas son confundidas en cualquier sitio [*anywhere*], entonces son confundidas dondequiera [*everywhere*], y si son confundidas no se distinguen, y si no son distinguidas, las mismas no pueden ser indicadas, y por ello el cálculo no hace ninguna indicación.

De un cálculo que no confunde una distinción que éste se propone [hacer] se dirá que es consistente.

Una clasificación de las expresiones

Las expresiones del estado marcado pueden ser llamadas dominantes. La letra *m*, a menos que se emplee de otra manera, puede considerarse que indica [*can be taken to indicate*] una expresión dominante.

Las expresiones del estado sin marcar [*unmarked state*] pueden ser llamadas recesivas. La letra *n*, salvo que sea empleada de otra manera, puede considerarse que indica una expresión recesiva.<[fin de la página 19][comienzo página 20]>

Teorema 5. Identidad

Las expresiones idénticas expresan el mismo valor.

En cualquier caso,

$$x = x.$$

Prueba

Por los teoremas 3 y 4 vemos que ningún paso dado a partir de una expresión *x* puede cambiar el valor expresado por *x*.

Por consiguiente, cualquier expresión a la que pueda arribarse [*can be reached*] mediante pasos desde *x* tiene que tener el mismo valor que *x*.

Pero a una expresión idéntica a *x* puede llegarse dando pasos desde *x* y recorriéndolos luego a la inversa [*and then retracing them*].

Así cualquier expresión idéntica a *x* tiene que expresar el mismo valor que *x*.

Por lo tanto,

$$x = x$$

en cualquier caso.

Teorema 6. Valor

Las expresiones con un mismo valor [of the same value] *pueden hacerse idénticas* [can be identified].

Prueba

Si x expresa el mismo valor que y, entonces tanto x como y se simplificarán hasta la misma expresión simple, llámela e_s.

[sigue]...

[continuación página 20]

Sea $v = e_s$. De este modo, v también se simplificará hasta e_s, y así a v se llegará ya sea desde x o desde y, dando pasos hasta e_s y luego volviendo sobre los pasos [*retracing*] de la simplificación de v.

Así

$$x = v$$

y

$$y = v.$$<[fin de la página 20][comienzo página 21]>

Por consiguiente, por la convención de la sustitución, tanto x como y pueden ser cambiadas por una idéntica expresión v en cada caso.

Pero x e y pueden ser cualesquiera expresiones equivalentes.

Por lo tanto, las expresiones con un mismo valor pueden hacerse idénticas.

Teorema 7. Consecuencia

Las expresiones equivalentes a una idéntica expresión son equivalentes entre si.

En cualquier caso, si

$$x = v$$

y

$$y = v$$

entonces

$$x = y.$$

Prueba

Sea e_s simple, y sea $v = e_s$.

Ahora, puesto que $x = v$ e $y = v$, a e_s se puede llegar mediante pasos desde x y mediante pasos desde y.

Procedimiento. Dé los pasos que llevan desde x hasta e_s, y desde e_s recorra a la inversa los pasos [*retrace the steps*] que van desde y a e_s.

De este modo, se llega a y mediante pasos a partir de x.

Por consiguiente, si

$$x = v$$

y

$$y = v$$

entonces

$$x = y$$

en cualquier caso. <[fin de la página 21][comienzo de la página 22]>

Teorema 8. Invariancia

Si espacios sucesivos s_n, s_{n+1}, s_{n+2} son distinguidos por dos cruces, y s_{n+1} impregna una expresión idéntica a toda [the whole] *la expresión en s_{n+2}, entonces el valor de la expresión resultante s_n es el estado sin marcar.*

En cualquier caso,

[ ].

Prueba

Sea p = ¬ . En este caso

[ ] sustitución

= orden (dos veces).

Ahora sea p = . En este caso

[ ] sustitución

= orden.

No hay ningún otro caso de p, teorema 1.

No hay ningún otro modo de sustituir cualquier caso de p, teoremas 5, 6.

Por consiguiente,

[ ]

en cualquier caso.

Teorema 9. Varianza [*variance*]

Si espacios sucesivos s_n, s_{n+1}, s_{n+2} son arreglados de modo que s_n, s_{n+1} son distinguidos por un cruce, y s_{n+1}, s_{n+2} son distinguidos por dos cruces, (estando así s_{n+2} en dos divisiones), entonces toda la expresión e en s_n es equivalente a una expresión similar en otros<[fin pág. 22][comienzo página 23]>*respectos a e, en la cual una expresión idéntica ha sido sacada de cada división de s_{n+2} y puesta dentro de s_n.* [sigue]...

[continuación página 23]>

En cualquier caso

[=] r.

Prueba

Sea r = ¬ .

Así

[ ] = [ ] sustitución

= [ ] teorema 2 (dos veces)

= ¬ orden 2 (dos veces)

y

[ ] r = [ ] ¬ sustitución

= ¬ teorema 2.

Por lo tanto, en este caso,

[ ] = [ ] r teorema 7.

Ahora sea r = .

Así

[ ] = [ ] sustitución

y

[ ] r = [ ] sustitución.<[fin de la página 23] [comienzo página 24]>

Por consiguiente, en este caso,

[ ] = [ ] *r* teorema 7.

No hay ningún otro caso de *r*, teorema 1.

No hay ningún otro modo de sustituir cualquier caso de *r*, teoremas 5, 6.

Por lo tanto

[ ] = [ ] *r*

en cualquier caso.

Una clasificación de los teoremas

Los primeros cuatro teoremas contienen una enunciación [*a statement*] de la completitud y la consistencia de la representación. La prueba de los mismos envuelve [*comprise*] una justificación del uso de la aritmética primaria como un sistema de indicadores de los estados distinguidos por la primera distinción. Los llamamos teoremas de representación.

Los tres siguientes teoremas justifican el uso de ciertos procedimientos de contracción [*procedural contractions*] sin los cuales las subsiguientes justificaciones podrían volverse insoportablemente engorrosas [*cumbersome*]. Los llamamos teoremas de procedimiento.

Los dos últimos teoremas servirán como una puerta de entrada a un nuevo cálculo. Los llamamos teoremas de conexión.

El nuevo cálculo mismo dará origen a teoremas adicionales [*further*] que, cada vez que describan aspectos del nuevo cálculo sin referencia directa al anterior [*without direct reference to the old*], serán llamados puros teoremas algebraicos, o teoremas de segundo orden.

Además, encontraremos teoremas acerca de los dos cálculos considerados conjuntamente. El teorema puente [*bridge theorem*] y el teorema de completitud son ejemplos, y los podemos llamar teoremas mixtos [*mixed*].<[fin de la página 24][comienzo de página 25]>

Capítulo 5. UN CÁLCULO SACADO FUERA DEL CÁLCULO [*taken out of the calculus*]

Sean huellas [*token*] con forma de variable [*Let token with variable form*]

a, b, ...

que indican expresiones en la aritmética primaria.

Sean sus valores desconocidos excepto en cuanto, por el teorema 5,

a = *a*, *b* = *b*, ...

Sean huellas con forma de constante

¬

que indican instrucciones de cruzar el límite de la primera distinción de acuerdo con las convenciones ya introducidas.

[sigue]...

[continuación página 25]>

Llámese a cualquier huella con forma de variable al igual [*after*] que su forma.

A cualquier huella con forma de constante llámesela

cruce.

Tómense las indicaciones usadas en la descripción del teorema 8, fuera de contexto de modo que

$$[\qquad] = \qquad .$$

Llámese a esto la forma de la posición.<[fin de la página 25][comienzo página 26]>

Tómense las indicaciones usadas en la descripción del teorema 9, fuera de contexto de modo que

$$[\qquad] = [\qquad] \, r.$$

Llámese a esto la forma de la transposición.

Sean las formas de la posición y la transposición tomadas como los inicios [*initials*] de un cálculo.

Véase este cálculo como un cálculo para la aritmética primaria.

Llámelo el álgebra primaria.

Calculación [*calculation*] **algebraica**

En las álgebras, para el uso del signo =, se aceptan comúnmente como implícitas dos reglas.

Regla 1. Sustitución

Si $e = f$, y si h es una expresión construida mediante la sustitución de cualquier aparición de e en g por f, entonces $g = h$.

Justificación. Esta regla es una reformulación de la convención aritmética de sustitución junto con una inferencia a partir de los teoremas de representación.

Regla 2. Reemplazo [*replacement*]

Si $e = f$, y si cada huella de una dada expresión de variable independiente v en $e = f$ es reemplazada por una expresión w, no siendo necesario para v, que w sea equivalente, o para w ser independiente o variable, y si como resultado de este procedimiento e se vuelve [*becomes*] j y f se vuelve k, entonces $j = k$.

Justificación. Esta regla se deriva del hecho, probado en los teoremas de conexión, de que podemos encontrar expresiones equivalentes, no idénticas, que, consideradas aritméticamente, no son totalmente reveladas [*wholly revealed*]. En una ecuación de tales expresiones cada indicador de variable independiente representa [*stands for*] una expresión [cuyo valor] puede cambiarse a voluntad [y] que, siendo desconocido excepto en cuanto, por el teorema 5, su valor debe considerarse ser [*must be taken to be*]<[final de la página 26] [comienzo de página 27]> el mismo dondequiera que su indicador aparezca. De ahí que su indicador puede también ser cambiado a voluntad, siempre y cuando [*provided only that*] el cambio se haga en cada aparición del indicador.

Indización [*indexing*]

Los miembros numerados de una clase de hallazgos [*findings*] serán de aquí en adelante [*henceforth*] indizados con una letra mayúscula que denota la clase, seguida de un cifra [*figure*] que denota el número del miembro. Las [diferentes] clases serán indizadas así.

Consecuencia	C
Inicio de la aritmética primaria	I
Inicio del álgebra primaria	J
Regla	R
Teorema	T

Ciertas ecuaciones, designadas con la letra E, serán también indizadas, pero la referencia en cada capítulo será confinada a un conjunto separado. Así E1, etc., en el Capítulo 9 intencionalmente no serán las mismas ecuaciones que E1, etc., en el Capítulo 8.<[fin de la página 27 y fin del Capítulo 5]

[comienzo página 28]>

Capítulo 6 – EL ÁLGEBRA PRIMARIA

Inicio 1. Posición

J1 [ ] = sacar [*take out*]

poner [*put in*]

Inicio 2. Tranposición

J2 [ ] = [ ] reunir [*collect*]

distribuir

Procederemos a distinguir patrones [*patterns*] particulares, llamados consecuencias, que pueden encontrarse en secuencias de manipulaciones de esos inicios [*initials*].

Consecuencia. Reflexión

C1 [ ] = a reflejar [*reflect*]

Reflejar

Demostración

Primero hallamos

[ ] = [ ]

mediante J1. Usamos R2 para convertir [ ] = en [ ] = cambiando cada aparición [*appearance*] de p <[fin de la página 28] [comienzo página 29]> en una aparición de [ ] . Luego usamos R1 para cambiar una aparición de en una aparición de [ ] en el espacio [que contiene] la expresión original [ ], encontrando así [que] [ ] = [ ] .

Después hallamos

[ ] = [ ]

por medio de J2. Hacemos uso de la licencia permitida en la definición (p. 5) de = para convertir [ ] = [ ] en [ ] = [ ] . A continuación usamos la licencia permitida en la definición (p. 6) de relación para cambiar esto en [ ] = [ ] . Usamos luego R2 para cambiar cada aparición de p en esta ecuación, en una aparición de [ ] , hallando así [ ] = [ ] . Usamos R2 otra vez para cambiar cada aparición de q en esta ecuación, en una aparición de a, y luego de nuevo para cambiar cada aparición de r en una aparición de [ ] , encontrando de este modo [que]
[ ] = [ ].

Luego hallamos

[ ] = [ ]

mediante J1. Por la primera ecuación hallamos [que] [ ] = , <[fin de la

página 29][comienzo página 30]> y ahora sólo necesitamos usar R1 para cambiar la
aparición de [ ] en el espacio [que contiene] [ ], en una aparición de
en [ ] para hallar [ ] = [ ] .

Luego hallamos

[ ] = [ ]

por medio de J1. Usamos R2 para convertir [ ] = en [ ] = cambiando toda p en a, y después usamos R1 para cambiar en [ ] en el espacio [que contiene] [ ], hallando así [ ] = [ ] .

Luego hallamos

[ ] = [ ]

por medio de J2, usando R2 para cambiar toda p en [ ], y después toda q en [ ] , y luego toda r en a.

Y finalmente, encontramos

[ ] = a

mediante J1. Hallamos que [ ] = usando R2 para cambiar <[fin de la página 30] [comienzo página 31> toda p en [ ], y luego usamos R1 para cambiar [ ] en en el espacio [que contiene] a, encontrando así [ ] = a.

Esto completa una detallada exposición de cada uno de los seis pasos. Podemos ahora usar T7 cinco veces para hallar

[ ] = a

y esto completa la demostración.
[continuación página 31]>

Repetimos esta demostración, y damos las subsiguientes demostraciones, con sólo los índices claves [*key indices*] para el procedimiento.

[ ]
= [ ] J1
= [ ] J2
= [ ] J1
= [ ] J1
= [ ] J2
= a J1. <[fin de la página 31] [comienzo página 32]>

Consecuencia 2. Generación

C2 [ ] = [ ] degenerar
regenerar

Demostración

[ ]
= [ ] C1
= [ ] C1
= [ ] J2
= [ ] J1
= [ ] C1.

Consecuencia 3. Integración

C3 ¬ a = ¬ reducir
aumentar

Demostración

¬ *a*
= [ ] C2
= [ ] C1
= ¬ J1. <[fin de la página 32] [comienzo página 33]>

Consecuencia 4. Ocultación

C4 [ ] = *a* ocultar [*conceal*]
revelar

Demostración

[ ]
= [ ] C2
= [ ] C2
= *a* J1.

Consecuencia 5. Iteración

C5 *aa* = *a* iterar
reiterar

Demostración

aa
= [ ] C1
= *a* C4.

Consecuencia 6. Extensión

C6 [ ] = *a* contraer
expandir

Demostración

[ ]
= [ ] C1 <[fin de la página 33] [comienzo página 34]>
= [ ] J2
= [ ] J1
= *a* C1.

[sigue]....

[continuación págna 34]

Consecuencia 7. Escalón [*echelon*]

C7 [ ] = [ ] romper [*brake*]
hacer [*make*]

Demostración

[ ]
= [ ] C1
= [ ] J2
= [ ] C1.

Consecuencia 8. Transposición modificada

C8 [ ] = [ ] reunir [*collect*]
Distribuir

Demostración

[ ]
= [ ] C1
= [ ] J2

= [ ] c7. <[fin de la página 34] [comienzo página 35]>

Consecuencia 9. Transposición de cruce [*crosstransposition*]

C9 [ ] transponer el cruce [*crosstranspose*]

= [ ] (reunir) [*collect*]
transponer el cruce
(distribuir)

Demostración

[ ]
= [ ] C1,
J2,
C1
= [ ] C8,
C1 (tres veces)
= [ ] C2,
C1
= [ ] C2
= [ ] C6.

La clasificación de las consecuencias

Al clasificar estas consecuencias, no hace falta [*there is no need to*] confinarlas rígidamente a las forma de arriba. El nombre de una consecuencia puede indicar una parte de la consecuencia, como en

[ ] = ¬ integración. <[fin de la página 35] [comienzo página 36]>

En otro caso puede indicar reflejos [*reflexions*] como en

[ ] = [ ] transposición o escalón

y

[ ] = [ ] extensión.

En otro caso puede incluso [*yet*] indicar una forma de cruce transpuesto [*crosstransposed form*] tal como

[ ] = *a* extensión.

Tampoco, como hemos visto ya en un caso, las clases de consecuencia son propiamente distintas. Lo que estamos haciendo es indicar números cada vez más grandes de pasos en una sola indicación. Esta es la forma dual de la contracción de una referencia, notablemente la expansión de su contenido. Nos deshacemos [*shed*] del trabajo de calculación [*calculation*] tomando un número de pasos como un solo paso. [sigue]...

[continuación página 36]>

De este modo si consideramos la equivalencia de los pasos, encontramos

[ ] = [ ] .

También, puesto que volver sobre un paso puede considerarse como no darlo, tenemos

[ ] = .

Pero ahora si permitimos pasos en la indicación de pasos, encontramos que el cálculo resultante es inconsistente.

Así

[ ] = [ ] = ,

o

[ ] = [ ] ,

según qué paso damos primero. <[fin de la página 36] [comienzo página 37]>

Por consiguiente,

= [ ] ,

que sugiere que, en cualquier calculación, consideramos cualquier número de pasos, incluso cero, como un paso.

Esto concuerda con nuestra idea de la naturaleza de un paso que, como ya hemos determinado, no está concebido [*is not intended*] para cruzar un límite.

Una clasificación adicional de las expresiones

La consideración algebraica del cálculo de indicaciones nos lleva a una distinción adicional entre expresiones.

Las expresiones del estado marcado pueden ser llamadas integrales [*integral*]. La letra *m*, salvo que esté empleada de otra manera, puede considerarse que indica una expresión integral.

Las expresiones del estado sin marcar pueden ser llamadas desintegrales [*disintegral*]. La letra *n*, a menos que esté empleada de otra manera, puede considerarse que indica una expresión desintegral.

Las expresiones de un estado que se sigue de[*consequent on*] los estados de sus indicadores desconocidos pueden ser llamadas consecuentes [*consequential*]. La letra *v*, salvo que sea empleada de otro modo, puede considerarse que indica una expresión consecuente. <[fin de la página 37 y del Capítulo sobre el álgebra primaria]

[comienzo página 38]>

Capítulo 7- TEOREMAS DE SEGUNDO ORDEN

Teorema 10

El alcance [scope] *de J2 puede ser extendido a cualquier número de divisiones del espacio* s_{n+2}.

En cualquier caso,

[ ] = [ ] .

Prueba

Consideramos los casos en que s_{n+2} es dividido respectivamente entre 0, 1, 2 y más de 2 divisiones. En el caso de 0

¬ *r* = ¬ C3.

En el caso de 1

[ ] *r* = *ar* C1

= [ ] C1.

En el caso de 2 [ ] *r* = [ ] J2.

En caso de más de 2

[ ] *r*

= [ ] *r* C1 (tantas veces como sea necesario)

<[fin de la página 38] [comienzo página 39]>

= [ ] J2 (tantas veces como sea necesario)

= [ ] C1 (tantas veces como en los anteriores).

Esto completa la prueba.

Teorema 11

El alcance de C9 puede ser extendido como en T10.

[ ] = [ ]

= [ ] [ ]

Las pruebas de T11 y de T12 se obtienen [*follow*] como en las demostraciones de C8 y C9, usando T10 en vez de J2.

Teorema 13

El proceso generativo en C2 puede extenderse a cualquier espacio [que no sea] más superficial [not shallower] *que aquél en que la variable generada aparece por primera vez* [than that in which the generated variable first appears].

Prueba

Consideramos los casos en los que se genera una variable en los espacios 0, 1 y más de 1 espacio más profundos [*deeper*] que el espacio de la variable de origen. En el caso de 0

[ ] *g* = [ ] *gg* C5. <[fin de la página 39] [comienzo página 40]>

En el caso 1

[ ] g

= [ ] g C2.

En el caso de más de

[ ] g

= [ ] g C2

= [ ] g C2

= [ ] g C2

y así sucesivamente. Resulta claro que no hace falta [agregar] ninguna otra consideración para la generación adicional [*further*] de g, y es obvio [*plain*] que puede alcanzarse [*can be reached*] cualquier espacio [que no sea] más superficial que aquél en que se encuentra g [*than that in which* g *stands*].

[sigue]...

[continuación pagina 40]>

Es conveniente considerar J2, C2, C8 y C9 como extendidos por sus respectivos teoremas, y dejar que el nombre del inicio [*initial*] o consecuencia denote también el teorema que lo extiende.

Teorema 14. Canon con respecto a la constante

A partir de cualquier expresión dada, puede derivarse una expresión equivalente no más profunda que dos cruces [not more than two crosses deep].

Prof.

Supóngase que una expresión dada e tiene i espacios de máxima profundidad [*deepest*], de profundidad d, y que $d > 2$.

Llevamos a cabo un procedimiento de reducción de la profundidad con C7. La inspección de las posibilidades muestra que no se necesitan más de $2^i - 1$ pasos para hallar $e = e_1$ de modo que e_1 tenga (digamos) j espacios [de máxima profundidad] de profundidad $d - 1$. (El número mayor de pasos se necesita en caso <[fin de la página 40] [comienzo página 41]> de que la parte de s_{d-2} en e es la única parte que contiene s_d, y cada división de s_d está contenida en una división separada de s_{d-1}.) Si $(d - 1) > 2$ continuamos el procedimiento a lo sumo con $2^j - 1$ pasos adicionales para hallar $e_1 = e_2$ de modo que e_2 esté a sólo $d - 2$ cruces de profundidad [*crosses deep*]. Vemos que el procedimiento puede continuarse hasta que encontremos $e = e_{d-2}$ de modo que e_{d-2} se encuentre a sólo $d - (d - 2) = 2$ cruces de profundidad, y con esto se completa la prueba.

Teorema 15. Canon con respecto a una variable

A partir de cualquier expresión dada, puede derivarse una expresión equivalente de modo que contenga no más de dos apariciones de cualquier variable dada.

Prueba

La prueba es trivial para una variable que no esté contenida en la expresión original *e*, y podemos así confinar nuestra [atención] a la consideración del caso de una variable *v* contenida en *e*. Ahora, por C1 y T14

e = . . . [ ] . . . .,

en la que *a, b, . . ., p, q, . . . , x, y, . . .,* y *f* representan [*stand for*] arreglos [*arrangements*] apropiados a la expresión *e*,

= . . . [ ] *f* [ ] . . . C1, J2, C1 (cada uno tantas veces como sea necesario)

= . . . [ ] . . . llamando *g* = [ ] . . .

= [ ] *g* C1, J2 (dos veces cada uno)

y esto completa la prueba. <[fin de la página 41] [comienzo página 42]>

Capítulo 8 – VOLVIENDO A UNIR [*re-uniting*] LOS DOS ÓRDENES

Contenido, imagen y reflejo

Para cualquier expresión *e*, llámese a *e* el contenido, llámese a [ ] la imagen, y llámese a [ ] el reflejo.

Puesto que [ ] = *e*, el acto de reflejo es un regreso desde una imagen a su contenido, o desde un contenido a su imagen.

Supóngase que *e* es un cruce. El contenido de *e* es el contenido del espacio en que se encuentra, no el contenido del cruce que marca el espacio.

En general, un contenido está donde lo hemos marcado, y una marca no se encuentra dentro del límite que configura [*shaping*] su forma, sino dentro del límite que lo rodea y configura otra forma. De este modo, al describir una forma, encontramos una sucesión,

[sigue]...

[continuación página 42]>

contenido
contenido imagen
contenido imagen contenido
contenido imagen contenido imagen . . .

Espacio indicativo

Si s_0 es el espacio que *e* impregna [*the pervasive space of e*], el valor de *e* es su valor para s_0. Si *e* es la totalidad de la expresión en s_0, s_0 toma el valor de *e* y podemos llamar a s_0 el espacio indicativo de *e*.

Al evaluar a *e* nos imaginamos a nosotros mismos en s_0 con *e* y, de este modo, rodeados por el cruce no escrito [*unwritten cross*] que es el límite [*boundary*] para s_{-1}. <[fin de la página 42] [comienzo página 43]>

Séptimo canon. Principio de relevancia

Si una propiedad es común a toda [every] *indicación, no necesita ser indicada.*

Un cruce no escrito es común a toda expresión en el cálculo de indicaciones y por ende no necesita estar escrito, De manera similar, un valor recesivo es común a toda expresión en el cálculo de indicaciones y, en virtud de este principio, tampoco tiene ningún indicador necesario allí [*has no necessary indicator there*].

En la forma de cualquier cálculo, encontramos las consecuencias en su contenido, y los teoremas en su imagen.

De este modo

[ ] = ¬

es una consecuencia en la aritmética primaria y, por consiguiente, en el contenido de ésta.

Demostración

[ ]
= [ ] I2
= [ ] I2
= ¬ I1.

Una consecuencia es aceptable porque nosotros fuimos quienes decidimos las reglas. Todo lo que tenemos que mostrar es que la misma se sigue por medio [*through*] de éstas.

Pero con excepción de las consecuencias más simples, cualquier demostración de las mismas en el contenido de la aritmética primaria resulta repetitiva y tediosa, y podemos contraer el procedimiento empleando teoremas que son acerca de la aritmética primaria, o están en la imagen de ésta [*which are about, or in the image of, the primary aritmethic*]. Por ejemplo, en vez de demostrar la consecuencia de arriba, podemos usar T2.

T2 es el enunciado [*statement*] de que todas las expresiones de una cierta clase, que <[fin de la página 43] [comienzo página 44]> [dicho enunciado] describe sin enumeración, y de las cuales la expresión de arriba puede reconocerse como un ejemplo, indican el estado marcado. La prueba de [este enunciado] puede considerarse como una demostración simultánea de todas las simplificaciones de expresiones de la clase descrita.

Pero el teorema en si no es una consecuencia. Su prueba no procede según las reglas de la aritmética, sino que, en vez de eso, se sigue [*follows*] por medio de [*through*] ideas y reglas de razonamiento y de cómputo [*counting*] para las cuales, a estas alturas [*at this stage*], no hemos hecho nada que las justifique.

Así, si alguna persona no acepta una prueba, lo único que podemos hacer es intentar una prueba diferente [*we can do no better than try another*] . Un teorema es aceptable porque lo que éste enuncia [*states*] es evidente, pero como una regla no consideramos que merezca ser registrado si su evidencia no necesita que, de alguna manera, se la haga evidente. Esta regla encuentra una excepción en el caso de un axioma, que puede aparecer como evidente sin ninguna orientación adicional. Tanto los axiomas como los teoremas son enunciados más o menos simples acerca de los principios fundamentales [*ground*] donde hemos elegido asentarnos [*the ground on which we have chosen to reside*].

[sigue]...

[continuación página 44]>

Puesto que los pasos iniciales del álgebra se dieron para representar teoremas acerca de la aritmética, depende de nuestro punto de vista el que a una ecuación con variables la consideremos como si expresara una consecuencia en el álgebra o un teorema sobre la aritmética. Cualquier consecuencia demostrable puede ser, alternativamente, probada como un teorema, y este hecho puede resultar útil dondequiera que la secuencia de pasos sea difícil de encontrar. Así, en vez de demostrar en el álgebra la ecuación

[ ] = [ ] ,

podemos probarla mediante la atitmática.

Llámese [*call*]

E1 [ ] = x

y

E2 [ ] = y. <[fin de la página 44] [comienzo página 45]>

Tómese $a = \neg$. De este modo

x	= [ ]	sustitución en E1
	= [ ]	I2
	= [ ]	T2, T7
	= [ ]	T9
	= [ ]	T2
	= [ ]	I2 (dos veces)

y [tenemos]

y	= [ ]	sustitución en E2
	= [ ]	T2
	= [ ]	I2 (dos veces)

y por ende $x = y$ en este caso, T7.

Ahora, tómese $a =$. Así

x	= [ ]	sustitución en E1
	= [ ]	T2, T7
	= [ ]	T9 <[fin de la página 45] [comienzo página 46]>
	= [ ]	T2
	= [ ]	I2 (dos veces)

y [tenemos]

y	= [ ]	sustitución en E2
	= [ ]	T2
	= [ ]	I2

y, por lo tanto, $x = y$ en este caso, T7.

No hay ningún otro caso, T1.

Por consiguiente $x = y$.

Por su origen, las consecuencias en el álgebra son aritméticamente válidas, de modo que podemos utilizarlas como nos plazca para acortar la prueba.

Prueba abreviada

Tómese $a = \neg$. Así

x = [ ] sustitución en E1
= [ ] C3,
C1 (tres veces)

y [tenemos]

y = [ ] sustitución en E2
= [ ] C3,
C1 (dos veces)

y de este modo $x = y$ en este caso, T7. <[fin de la página 46]

[sigue]...

[comienzo página 54]>

Capítulo 11 - ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Hasta el momento, hemos obedecido una regla (teorema 1) que requiere que cualquier expresión dada, en la aritmética o en el álgebra, sea finita. De lo contrario, por los cánones hasta ahora invocados [*called*], no tendríamos ningún medio de encontrar su valor.

De ahí se sigue que, en un número finito de pasos, puede llegarse a cualquier expresión dada a partir de cualquier otra expresión equivalente. Encontraremos conveniente adoptar [*extract*] este principio como una regla para caracterizar el proceso de demostración.

Noveno canon. Regla de demostración

Una demostración descansa [rests] *en un némero finito de pasos.*

Un modo de ver que esta regla es obedecida es contar los pasos.No necesitamos confinar su aplicación a ningún nivel dado de consideración. En una expresión algebraica cada variable representa un número de cruces desconocido (o inmaterial), y por ende no es posible en este caso contar pasos aritméticos. Perp áun podemos contar pasos algebraicos.

Podemos notar que, de acuerdo con la observaxión del Capítulo 6 sobre la naturaleza de un paso, no importa si varios conteos no coinciden [*disagree*], siempre que [*as long as*] al menos un conteo sea finito.

Considérese la expresión

[ ] . <[fin de la página 54] [comienzo página 55]>

Proponemos ahora generar una secuencia de pasos con la siguiente forma.

[ ]
= [ ]
C5
= [ ]
C1
= [ ]
J2
= [ ]
C4

= [ ]
C1
= [ ]
C5
= [ ]
C1 = [ ]
J2
= [ ]
C4
= [ ]
C1
etc. No hay ningún límite para la posibilidad de continuar la secuencia, y así no hay límite para el tamaño del escalonamiento [*echelon*] de [expresiones] de *a*'s y *b*'s alternándose, con las cuales [ ] puede ser igualada. <[fin de la página 55] [comienzo página 56]>

Imaginémonos, si podemos, que la orden de empezar la secuencia de pasos nunca es revocada [*countermanded*] de modo que el proceso continúa indefinidamente. En el espacio ésto nos dará un escalonamiento sin límite, de la forma

[ ] .

Ahora, puesto que a esta forma, por ser interminable [*endless*], no puede llegarse en un número finito de pasos a partir de [ ] , no esperamos que necesariamente [dicha forma] exprese el mismo valor que [ ] . Pero por medio de un exhaustivo examen de las posibilidades, podemos establecer [*ascertain*] qué valores podría tomar en los diversos casos de *a, b*, y compararlos con los de la expresión finita.

Reingreso [*re-entry*]

La clave [radica en] ver que la parte cruzada [*crossed*] en cada profundidad par [*even depth*] es idéntica a toda la expresión, que puede así considerarse como reingresando a su propio espacio interior [*inner*] en cada profundidad par. Así

[sigue]...

[continuación página 56]>

f = [ ]
E1 = [ ] .

Podemos ahora encontrar, mediante la regla de dominación [*dominance*], los valores que *f* puede asumir en cada caso posible de *a,b*.

[ ] = *f* E1
[ ] = *n*
[ ] = *m*
[ ] = *n*
[ ] = *m* o *n*. <[fin de la página 56] [comienzo página 57]> Para el último caso supóngase *f* = *m*. Luego

[ ] = *m*

y así E1 es satisfecho. Supóganse ahora *f* = *n*. Entonces

[ ] = *n*

y de este modo E1 es satisfecho de nuevo. Por ende, la ecuación tiene, en este caso, dos soluciones.

Es evidente, entonces, que a partir de una expresión *e* podemos, mediante un número ilimitado de pasos, arribar a una expresión *e'* que no es equivalente a *e*.

Vemos que, en un caso tal, ya no se cumplen [*no longer hold*] los teoremas de representación, puesto que el valor aritmético de *e'* no se encuentra, para todo caso posible de *a,b*, determinado de manera única.

Indeterminación [*indeterminacy*]

Hemos así introducido en *e'* un grado de indeterminación con respecto a su valor que no necesariamente se resuelve (como en el caso de la indeterminación introducida meramente por causa del uso de variables independientes) fijando el valor de cada variable independiente. Pero esto no excluye [que podamos] igualar una expresión tal con [alguna] otra [*another*], siempre que el grado de indeterminación mostrado por cada expresión sea el mismo.

Grado [*degree*]

Podemos tomar el grado evidente de esta indeterminación para clasificar la ecuación en la que tales expresiones son igualadas.

Es evidente que J1 y J2 se cumplen para todas las ecuaciones, cualquiera que sea su grado. Así es posible usar el procedimiento corriente <[fin de la página 57] [comienzo página 58]> de demostración (esbozado en el Capítulo 6) para verificar una ecuación de grado >1. Pero se nos niega el procedimiento (bosquejado en el Capítulo 8) de referirse a la aritmética para confirmar una demostración de cualquier ecuación semejante, puesto que la excursión hacia la infinidad emprendida para producirla nos ha negado nuestro anterior acceso a un conocimiento completo de dónde nos encontramos en la forma. De ahí que se hizo necesario, antes de alejarnos [*before departing*], extraer la regla de la demostración, porque ésta se vuelve ahora, con la regla de dominación, un principio rector [*guiding principle*] por medio del cual todavía podemos hallar nuestro camino.

Estado imaginario

La pérdida de nuestra conexión con la aritmética se ilustra mediante el siguiente ejemplo. Sea

E2 f_2 = [ ]

E3 f_3 = [ ]

Claramente, cada [caso de] E2, E3 puede representarse en la aritmética igualando una u otra *f* con la misma expresión infinita, así

f_2, f_3 = [ ]

[sigue]...

[continuación página 58]>

Pero [queda] igualmente claro que, mientras E2 le da cabida [*is open*] a las soluciones aritméticas ¬ o , cada una de las cuales lo satisface sin contradicción, E3 no es satisfecho por ninguna de esas soluciones, y no puede, por lo tanto [*thereby*], expresar el mismo valor que E2. Y puesto que ¬ y representan los únicos estados de la forma contemplados [*envisaged*] hasta ahora, si queremos pretender que E3 tiene una solución, tenemos que permitirle tener una solución que represente un estado imaginario de la forma, no considerado hasta el momento.

Tiempo

Puesto que no deseamos, si podemos evitarlo, abandonar [*to leave*] la forma, el estado que contemplamos no está en el espacio sino en el tiempo. (Siendo posible <[fin de la página 58] [comienzo página 59]> ingresar [*enter*] a un estado del tiempo sin dejar el estado del espacio en que uno ya está alojado).

Una manera de imaginarse esto es suponer que la transmisión de un cambio de valor a través del espacio en que [este valor] está representado, toma tiempo para cubrir la distancia. Considérese un cruce [*cross*]

[ ]

en un plano. Una indicación del estado marcado es mostrada por el sombreado.

Supóngase ahora que la distinción trazada por el cruce sea destruida por un túnel bajo la superficie en que la misma aparece. En la figura 1 vemos los resultados de semejante destrucción en los intervalos $t_1, t_2, \ldots$

Frecuencia

Vemos que una vez que le damos [alguna] rapidez [*speed*] a la transmisión de una indicación de valor, tenemos también que darle una dirección, de modo que se convierte en una velocidad [*it becomes a velocity*]. Porque si no lo hiciéramos, no habría nada que detuviera la propagación avanzando hasta [donde] se ha representado (digamos) t_4, y luego continuando hacia la representación mostrada en t_3, en vez de la que se muestra en t_5. <[fin de la página 59] [comienzo página 60]>

[Figura 1]

Función [*function*]

Un expresión que contenga una variable v, la llamaremos alternativamente una función de v. Vemos así expresiones de valor o funciones de variables, según el punto de vista desde el cual las consideremos.

Función de oscilador

Al considerar las indicaciones de valor en el punto p de la figura 1, tenemos, en el tiempo, una sucesión de ondas cuadradas de una frecuencia dada.

[ ] . . .estado marcado indicado

. . .estado sin marcar [*unmarked*] indicado <[fin de la página 60] [comienzo página 61]>

Supóngase que dispongamos ahora que [*arrange for*] todas las propiedades relevantes del punto p en la figura 1 aparezcan en dos espacios sucesivos de expresiones, así [*thus*].

[ ]

Podríamos hacer esto ordenando [*arranging*] en cada espacio distinciones diluidas [*undermined*] de manera similar, suponiendo que la rapidez [*speed*] de la transmisión sea constante en todo momento [*throughout*]. En este caso la superposición [*superimposition*] de las dos ondas cuadradas en el espacio exterior, una de ellas invertida por el cruce, equivaldría a [*would add up to*] una representación continua del estado marcado allí.

Valor real e imaginario

El valor representado en (o por) el punto (o variable) p, siendo indeterminado en el espacio, puede ser llamado imaginario en relación a la forma. No obstante, como vemos arriba, es real en relación al tiempo y puede, en relación a si mismo, hacerse [*become*] determinado en el espacio, y de este modo [*thus*] real en la forma. [sigue]...

[continuación página 61]>

Hasta el momento hemos considerado una representación gráfica de E3. Consideraremos ahora en líneas similares E1 y su caso límite E2.

[Figura 2]

Función de memoria

El valor presente de la función f en E1 puede depender de su valor pasado y, por ende, de los valores pasados de a y b. En efecto, cuando tanto a como b indican el estado sin marcar [*unmarked*], recuerda cuál de ellos fue el último que indicó [*last indicated*] el estado marcado. Si a, entonces $f = m$. Si b, entonces $f = n$.<[fin de la página 61] [comienzo página 62]>

Subversión

Una manera de hacer que la configuración [*set-up*] ilustrada en la figura 2 se comporte exactamente como la f en E1, es disponer [*arrange*] que la transmisión efectiva a través del túnel se haga únicamente desde afuera hacia adentro. Llamaremos subversión a tal destrucción parcial de las propiedades distintivas de las constantes.

Podemos notar que, si deseamos aprovecharnos [*avail ourselves*] de las propiedades de memoria de f, donde f es una función uniformemnte [*evenly*] subvertida, deben evitarse ciertas transformaciones permitidas [*allowable*] en el caso de una expresión sin esta propiedad. Podemos, por ejemplo, permitir

[ ]

J2,

C1

pero debemos evitar

[ ]

C2

puesto que esta útima transformación es a partir de [*from*] una expresión mediante la cual una indicación del estado marcado por c puede ser confiablemente [*reliably*] recordada, a una expresión en la cual la memoria aparentemente [*apparently*] se ha perdido.

El tiempo en expresiones finitas

La introducción del tiempo en nuestras deliberaciones no surgió [*did not come*] como una decisión [*choice*] arbitraria, sino como una medida necesaria para ensanchar [*further*] la investigación [*inquiry*].

El grado de necesidad de una medida adoptada [lo da] la amplitud [*extent*] de su aplicación. La adopción [*measure*] del tiempo, como lo hemos introducido aquí, puede verse que cubre [*can be seen to cover*], sin inconsistencias, todas las formas de representación [*representative forms*] consideradas hasta el momento.

Esto puede ilustrarse reconsiderando E1. Aquí podemos someter a prueba [*test*] el uso del concepto de tiempo viendo [*by finding*] si éste lleva a la misma respuesta (i.e. si conduce a la misma memoria de estados dominantes de a, b) en la versión expandida de f como lo <[fin de la página 62] [comienzo página 63]> hace en la versión contraída de la Figura 2. A los fines de ilustración, consideraremos primero una expresión finita.

A partir de la Figura 3 se ve que tal expresión finita es estable en una condición, y tiene una memoria finita de la otra, de duración proporcional al grado de su extensión. Es claro que

[Figura 3]

una extensión ilimitada [*endless*] del escalón [*echelon*] permite una memoria ilimitada de la una o la otra condición [*of either condition*], de modo que el concepto de tiempo es una clave mediante la cual las formas contraídas y expandidas de f en E1 se hacen patentes las unas a las otras.

Un condición de especial interés emerge si el pulso a partir de a es de una duración suficientemente corta. En esta condición la expresión emite una sucesión [*train*] de ondas de longitud [*length*] y duración finitas, como se ilustra en la Figura 4.

La duración de la secuencia de ondas, la frecuencia de sus componentes, etc., dependen de la naturaleza y la extensión de la expresión <[fin de la página 63] [comienzo página 64]>

[Figura 4]

desde la cual es emitida. De una expresión infinitamente extendida sale [*comes*] una emisión potencialmente interminable [*endless*], y aquí de nuevo, los dos modos (contraído o expandido) de expresar E1 en relación al tiempo dan la misma respuesta. Sin la clave del tiempo, sólo la expresión contraída tiene sentido. [sigue]...

[continuación página 64]>

Cruces y marcadores

Considérese el caso donde la expresión en E1 representa una parte de una expresión mayor [*larger*]. Se hace ahora necesario no <[fin de la página 64] [comienzo página 65]> sólo indicar dónde una reinserción tiene lugar, sino también designar la parte de la expresión reinsertada. Puesto que la parte reinsertada ya no es más la totalidad de la expresión, en cada caso será necesario ya sea nombrar la parte reinsertada o indicarla mediante conexión directa.

Lo último es lo menos engorroso. Así podemos rescribir la expresión en E1

[ ]

de modo que pueda ser colocada, sin ambigüedad, dentro de una expresión mayor.

En una expresión subvertida simple de esta índole [*kind*] ninguna de las partes no literales son cruces, estrictamente hablando, puesto que, en cierto sentido, representan el mismo límite [*boundary*]. No obstante, es conveniente referirse a las mismas separadamente, y para este propósito [en] cualquier expresión llamaremos un marcador [*marker*] a cada parte no literal separada. De este modo, un cruce es un marcador, pero una marcador no tiene que ser un cruce [*need not be a cross*].

Función de modulador [*modulator function*]

Hemos visto que las funciones de segundo grado pueden ya sea oscilar o recordar. Si estamos preparados para escribir una función de grado 2 podemos encontrar una función que no sólo recordará, sino que contará. Una manera de representar [*picturing*] el conteo [*counting*] es considerarlo como lo contrario del recordar. Una función de memoria recuerda la misma respuesta ante la misma señal; una función de conteo la cuenta diferente cada vez [*counts it different each time*].

Otra manera de representar el conteo es como una modulación de una estructura de onda. Ésta es la manera como la representaremos aquí.

La modulación más simple es para una estructura de onda con la mitad de la frecuencia de la original [*is to a wave structure of half the frequency of the* *original*]. Para lograr esto con una función que use sólo valores reales, necesitamos ocho marcadores. <[fin de la página 65] [comienzo página 66]>

E4 f = [ ]

Si la estructura de onda de a es [ ] entonces la de f será [ ] o [ ], dependiendo de cómo la expresión es originalmente fijada [*set*] antes de que a empiece a oscilar.

Nos encontramos ahora en dificultades por intentar escribir en dos dimensiones lo que claramente está representado en tres. Deberíamos estar escribiendo en tres dimensiones. Podemos al menos idear un mejor sistema para dibujar representaciones tridimensionales en sólo dos dimensiones.

Represéntese un marcador con un trazo [*stroke*] vertical, así.

[ ]

Haga que lo que se encuentra bajo el marcador se vea que es tal mediante líneas de conexión llamadas guías [*leads*], así.

[ ]

Deje que el valor indicado por el marcador sea conducido desde el marcador por una guía, que puede, en la expresión, dividirse para ser ingresado [*to be entered*] bajo otros marcadores. Ahora, por ejemplo, la expresión

[ ]

puede representarse así. <[fin de la página 66]

[sigue]...

[comienzo página 67]>

[ ]

transfigurada de esta manera, E4 aparece en una forma

[ ]

en la que es más fácil seguir cómo la estructura de onda de a es desmontada [*taken apart*] y recombinada para dar la de f.

Vemos que la estructura de onda en p constituye una modulación similar con la fase desplazada. Mediante el uso de componentes imaginarios de algunas estructuras de onda, es posible obtener la estructura de onda en p con sólo seis marcadores. Esto se lustra en la siguiente ecuación. <[fin de la página 67] [comienzo página 68]>

[ ]

Aquí, aunque la estructura de onda real en i es idéntica a la que está en r, el componente imaginario en i asegura que la memoria en los marcadores c y d se encuentre adecuadamente establecida [*set*]. Consideraciones similares son aplicables a otras memorias en la expresión.

Coda

Al llegar a este punto, antes de que hayamos ido demasiado lejos como para olvidarlo, podemos regresar a considerar qué es lo que estamos deliberando.

Estamos, y hemos estado todo el tiempo, deliberando [acerca de] la forma de una única construcción (ordenada en la p. 3), notablemente la primera distinción. Toda la exposición [*account*] de nuestras deliberaciones es una exposición de cómo [dicha forma] puede aparecer, a la luz de los diversos estados de mente que ponemos en nosotros [*we put upon ourselves*].

Por el canon de la referencia que se expande (p. 10), vemos que la exposición puede proseguirse sin nunca terminar [endlessly].

Este libro no es interminable, de modo que tenemos que interrumpirlo en algún lugar. Lo hacemos ahora con las palabras y así sucesivamente [*and so on*]

Antes de partir, regresamos para darle una última mirada al acuerdo [*agreement*] con el cual la exposición se inició. <[fin de la página 68 y del Capítulo 11]

[comienzo página 69]

Capítulo 12 – REINGRESO A LA FORMA [*re-entry into the form*

La concepción de la forma radica [*lies*] en el deseo de distinguir.

Admitido [*granted*] este deseo, no podemos escapar de la forma, aunque podemos verla de cualquier manera que nos plazca.

El cálculo de las indicaciones es un modo de mirar [*regarding*] la forma.

El cálculo puede ser visto mediante la forma y la forma puede verse en el cálculo sin la ayuda [*unaided*] y sin el estorbo [*unhindered*] de la intervención de leyes, inicios [*initials*], teoremas, o consecuencias.

Los experimentos abajo ilustran una entre el sinnúmero de maneras posibles de hacer esto.

Debemos notar que en estos experimentos el signo

=

puede representar [*stand for*] la palabras

se confunde con.

Podemos también advertir que los lados de cada distinción experimentalmente trazada tienen dos clases de referencia.

La primera, o explícita, referencia es al valor de un lado, según como el mismo está marcado [*according to how it is marked*].

La segunda, o implícita, referencia es a un observador externo [*outside*]. Es decir, el exterior [*the <u>outside</u>*] es el lado desde el cual se supone que una distinción es vista. <[fin de la página 69] [comienzo página 70]>

Primer experimento

En un espacio plano, trácese un círculo

[ ]

Indíquese el exterior de la circunferencia con una marca *m*.

[ ] *m*

Que ninguna marca indique el interior de la circunferencia.

[ ] *m*

Sea la marca *m* un círculo.

m = [ ]

Reingrese la marca dentro de la forma del círculo.

[ ] [ ]<[fin de a página 70] [comienzo página 71]> Ahora el círculo y la marca, en lo que respecta a sus propiedades relevantes, no pueden distinguirse, y por ende

[ ] [ ] = [ ]

Segundo experimento

En un espacio plano trace un círculo.

[ ]

Indíquese el interior de la circunferencia con una marca *m*.

[*m*]

Que ninguna marca indique el exterior de la circunferencia.

[*m*]

Sea el valor de una marca su valor para [*to*] el espacio en que se encuentra. Es decir, que el valor de una marca sea para el espacio fuera de la marca.

Ahora el espacio fuera [*outside*] de la circunferencia está sin marcar [*is unmarked*]. <[fin de la página 71] [comienzo página 72]>

Por consiguiente, por valuación,

[*m*] =

Sea la marca *m* un círculo.

m = [ ]

[sigue]...

[continuación página 72]>

Reingrese la marca dentro de la forma del círculo.

[[ ]]

Ahora, por valuación,

[[ ]] =

Tercer experimento

En un espacio plano trace un círculo.

[ ] <[fin de la página 72] [comienzo página 73]>

Indíquese el exterior de la circunferencia con una marca *m*.

[ ] *m*

Con una marca similar *m* indíquese el interior de la circunferencia.

[*m*] *m*

Ahora, puesto que una marca *m* indica ambos lados de la circunferencia, éstos no pueden distinguirse en lo que respecta al valor.

De nuevo, sea la marca *m* un círculo.

m = [ ]

Reingrese la marca dentro de la forma del círculo.

[[ ]] [ ]

Ahora, debido a las marcaciones [*markings*] idénticas, el círculo original no puede distinguir valores diferentes.

Por lo tanto, el mismo no es, al respecto, una distinción. <[fin de la página 73] [comienzo de la página 74]>

Por consiguiente, puede ser suprimido sin pérdida o ganancia para el espacio en que se encuentra.

[[ ]] [ ] = [ ] [ ]

Pero en el primer experimento encontramos que

[ ] [ ] = [ ]

Por lo tanto,

[[ ]] [ ] = [ ]

y esto no es inconsistente con el hallazgo [*finding*] del segundo experimento de que

[[ ]] =

puesto que aquí hemos hecho en dos pasos, lo que allí se hizo en uno solo. <[fin de la página 74] [comienzo página 75]>

Cuarto experimento

En un espacio plano trace un círculo.

[ ]

Sea el exterior de la circunferencia sin marcar [*unmarked*].

[ ]

Sea el interior de la circunferencia sin marcar.

[ ]

Pero en el primer experimento vimos que

[ ] [ ] = [ ]

y que, por consiguiente, invirtiendo [*reversing*] allí el procedimiento de purificación [*purifying procedure*],

[ ] = [ ] *m* . <[fin de la página 75]
[comienzo página 76]> El valor de una circunferencia para el espacio exterior debe ser, por ende, el valor de la marca, puesto que la marca distingue ahora este espacio.

Un observador es también una marca, puesto que él distingue el espacio que ocupa.

En los experimentos arriba, imagine que los círculos son formas y las circunferencias las distinciones que configuran [*shaping*] los espacios de esas formas.

En esta concepción una distinción trazada en cualquier espacio es una marca que distingue el espacio. Igualmente y de manera conversa, cualquier marca en un espacio traza una distinción.

Vemos ahora que la primera distinción, la marca, y el observador no son sólo intercambiables, sino idénticos en la forma.<[fin de la página 76 y del Capítulo 12]
[comienzo página 77]>

NOTAS

Capítulo 1

Aunque dice algo más, todo lo que el lector necesita tomar consigo del Capítulo 1 son la definición de distinción como una forma de clausura, y los dos axiomas que dependen [*rest with*] de esta definición.

Capítulo 2

En esta etapa puede ser de ayuda tomar nota [*realize*] de que la forma primaria de la comunicación en la matemática no es la descripción sino el mandato [*injunction*]. Al respecto la matemática es comparable a las formas de artes prácticas como la cocina, en la cual el sabor de una torta, aunque literalmente indescriptible, le puede ser comunicado al lector en la forma de un conjunto de mandatos que se llaman una receta. La musica es una forma similar de arte, en el que el compositor ni siquiera intenta describir el conjunto de sonidos que tiene en su mente, mucho menos el conjunto de sentimientos evocados [*occasioned*] por los mismos, sino que escribe en un papel [*writes down*] un conjunto de órdenes [*commands*] que si, son obedecidas por el lector, pueden tener como resultado para el lector, una reproducción de la experiencia original del compositor.

Allí donde Wittgenstein dice[4, proposición 7]

sobre lo que uno no puede hablar
uno debe callar [*be silent*]

parece estar considerando solamente el discurso [*speech*] descriptivo. En otra parte señala que el matemático, en términos de descripciones [*descriptively speaking*], no dice nada. Lo mismo puede decirse del compositor, quien, si fuera a intentar una *descripción* (i.e. una limitación) del conjunto de éxtasis que se hacen patentes *a través de* (i.e. sin límites mediante) su *composición*, fracasaría miserable y necesariamente. Pero ni el compositor ni el matemático tienen que callarse por esta razón.<[fin de la página 77][comienzo página 78]>

En su introducción al *Tractatus*, con respecto a la exactitud [*rightness*] de la última proposición de Wittgenstein Russell expresa lo que parece ser una duda justificada cuando dice [p22]

> lo que causa incertidumbre [*hesitation*] es el hecho de que, después de todo, el Sr. Wittgenstein se las arregla para decir un montón de cosas [*a great deal*] sobre lo que no puede ser dicho, sugiriéndole de este modo al lector escéptico que posiblemente debe haber algún hueco [*loophole*] a través de una jerarquía de lenguajes, o por alguna otra salida.

La salida, como hemos visto aquí, es evidente en la capacidad [*faculty*] prescriptiva [*injunctive*] del lenguaje.

Incluso las ciencias naturales parecen depender de mandatos, más de lo que usualmente estamos dispuestos a admitir. La iniciación profesional del hombre de ciencia consiste no tanto en leer los libros de texto apropiados, como en obedecer órdenes [*injunctions*] tales como 'mire por ese microscopio'. Pero no está fuera de lugar que los hombres de ciencia, después de haber mirado por el microscopio, ahora describan y discutan entre si lo que han visto, y que escriban artículos y libros de texto describiéndolo. Similarmente, no está fuera de lugar para los matemáticos que, después de haber cada uno de ellos obedecido un conjunto dado de mandatos, describan y discutan entre ellos lo que han visto, y que escriban artículos y libros de texto describiéndolo. Pero en cada caso la descripción es dependiente y secundaria frente [*dependent upon, and secondary to*] al conjunto de mandatos que han sido obedecidos primero.

Cuando intentamos ejecutar [*realize*] una pieza musical compuesta por otra persona, lo hacemos *ilustrándonos*, a nosotros mismos, con alguna clase de instrumento musical, [acerca de] las órdenes del compositor. Similarmente, si hemos de ejecutar una pieza de matemáticas, tenemos que encontrar una manera de ilustrarnos, a nosotros mismos, [sobre] las órdenes del matemático. El modo normal de hacer esto es con alguna clase de marcador [*scorer*] y una superficie plana rayable, por ejemplo, un dedo y una franja de arena aplanada por la marea, o un lápiz y una hoja de papel. Tomando alguna de tales ayudas para ilustrar, podemos ahora comenzar a ejecutar las órdenes del Capítulo 2.

[sigue]...

[continuación página 78]>

Primero podemos ilustrar una forma, tal como un círculo o casi un círculo. Una hoja plana de papel, siendo en si misma ilustrativa de una superficie plana, es una útil herramienta para este propósito, puesto que <[fin de la página 78][comienzo página 79]> sucede que sabemos que en un espacio semejante un círculo [decididamente] traza un distinción. (Si hubiéramos elegido, por ejemplo, escribir sobre la superficie de un torus, un círculo podría no haber trazado una distinción.)

Cuando llegamos al mandato [*injunction*]

sea una forma distinta de la forma

podemos ilustrarlo tomando una nueva hoja de papel (u otra franja de arena). Ahora, en esta forma separada, podemos ilustrar la orden [*command*]

cópiese la marca de distinción fuera
de la forma dentro de esa otra forma.

No es necesario que el lector limite sus ilustraciones a las órdenes que figuran en el texto. Puede explorar [*wander*] a voluntad [otras opciones], inventando sus propias ilustraciones, ya sean consistentes o inconsistentes con las órdenes de este texto. Sólo así, por sus propias búsquedas [*explorations*], llegará a ver distintamente los límites o las leyes del mundo desde el cual [*from which*] está hablando el matemático. Igualmente, si el lector no puede seguir [*follow*] el argumento en algún punto cualquiera, nunca es necesario que permanezca atascado [*stuck*] en ese punto hasta que vea cómo continuar [*proceed*]. No podemos comprender cabalmente el comienzo de ninguna cosa hasta que no vemos el final. Lo que el matemático espera conseguir [*aims*] es poder ofrecer un cuadro completo, siendo esencial el orden *de aquello* que él presenta, pero siendo en alguna medida [*to some degree*] arbitrario el orden *en que* él lo presenta. El lector puede de manera completamente legítima cambiar como le plazca este orden arbitrario.

Podemos distinguir, en el orden esencial, *órdenes* [commands], que introducen algo [*call something into being*], conjuran [*conjure up*] algún orden del ser, llaman al orden [*call to order*], y que usualmente son transmitidas en formas permisivas tales como

sea esto y aquello [*let there be so-and-so*],

u ocasionalmente, en formas más específicamente activas como

trácese una perpendicular [*drop a perpendicular*];<[fin de la página 79][comienzo página 80]>

nombres, dados para ser usados como puntos de referencia o señales [*tokens*]; en relación con la operación de *instrucciones*, que son concebidas [*designed*] para tener efecto dentro de cualquier [*whatever*] universo que ya ha sido [introducido mediante una orden] [*has already being commanded*] o llamado al orden. La institución o ceremonia de dar un nombre [*naming*] usualmente se expresa [*is carried*] en la forma de

a esto y aquello llámeselo tal y cual,

y el llamamiento [*call*] puede operar en ambas direcciones, como con el signo = , de modo que al llamar tal y cual a esto y aquello, podemos también llamar esto y aquello a tal y cual. El llamar puede así ser considerado carente de dirección [*without direction*], o, alternativamente, pan-direccional [*pan-directional*]. En contraste, la instrucción es direccional, por cuanto ésta demanda un cruzamiento [*crossing*] desde un estado o condición, con su propio nombre, hacia un diferente estado o condición, con otro nombre, tal que el nombre del primero [*former*] no puede ser invocado [*called*] como un nombre del segundo [*latter*].

Las estructuras más importantes de órdenes son a veces llamadas cánones [*canons*]. Éstos son los modos en que los mandatos guías [*guiding injunctions*] parecen agruparse en constelaciones [*constellations*], y así no son en modo alguno independientes los unos de los otros. Un canon posee [*bears*] la distinción de estar afuera (i.e. describiendo) del sistema en construcción, pero una orden de construir (e.g. 'trácese una distinción'), aun cuando pueda ser de capital importancia, no es un canon. Un canon es una orden [*order*], o conjunto de órdenes, para permitir o autorizar pero no para construir o crear.

[sigue]...

[continuación página 80]>

Las instrucciones que han de tener efecto, dentro de la creación y lo que está permitido en ésta [*its permission*], deben distinguirse como aquellas [que pertenecen realmente] al texto de la calculación [*those in the actual text of calculation*], designadas por las constantes u *operadores* del cálculo, y aquellas del contexto [*those in the context*], que pueden en si mismas ser instruciones para nombrar algo con un nombre particular de modo que podamos volver a referirnos al mismo sin tener que redescribirlo [*so that it can be referred to again without redescription*].

Más tarde (Capítulo 4) vendremos a considerar lo que llamamos las pruebas o justificaciones de ciertos enunciados [*statements*]. Lo que estaremos mostrando ahí, es que tales enunciados se encuentran implícitos o se siguen o están permitidos por los cánones o por las órdenes vigentes [*standing*] hasta ahora convenidos o invocados [*called to presence*]. Así en la estructura de una pruebe encontraremos mandatos de la forma <[fin de la página 80][comienzo página 81]>

considérese tal y cual,
supóngase esto y aquello,

no son órdenes, sino *invitaciones* o *direcciones* hacia una *vía* [way] en la que la implicación puede ser clara y plenamente [*wholly*] seguida.

Al concebir el cálculo de indicaciones, comenzamos en un punto de tal *degeneración* [degeneracy] como para encontrar que las ideas de descripción, indicación, nombre e instrucción pueden venir a ser [*can amount*] la misma cosa. Es de cierta importancia que el lector se dé cuenta de esto por si mismo, o encontrará difícil entender (aunque pueda seguir) el argumento (p. 5) que lleva a la segunda ecuación primitiva.

En la orden

sea el cruzamiento [*crossing*] el estado
indicado por la huella [*token*]

de inmediato dotamos a la huella de un doble significado, primero como una instrucción de cruzar, segundo como un indicador (y por ende un nombre) de adonde el cruzamiento nos ha llevado. Antes de obedecer la orden era una cuestión abierta si la huella expresaría [*would carry*] una indicación en absoluto [at all]. Pero la orden determina sin ambigüedad el estado hacia el cual se hace el cruzamiento y así, sin ambigüedad, [determina también] la indicación que la huella transmitirá [*carry*] de aquí en adelante.

A esta doble carga [*double-carry*] [de significado] de nombre-con-instrucción y de instrucción-con-nombre se hace usualmente referencia (en el lenguaje de las matemáticas) como una estructura en la que las ideas o los significados *degeneran* [degenerate]. Podemos también referirnos a ello (en el lenguaje de la psicología) como un lugar donde las ideas se *condensan* en un símbolo. Es esta condensación lo que le confiere al símbolo su *poder* [power]. Porque en las matemáticas, como en otras disciplinas, la potencia [*power*] de un sistema reside en su elegancia (literalmente, en su capacidad para tomar [*pick up*] y elegir), que se logra condensando todo lo que hace falta en lo mínimo que se necesita [*as much as is needed into as little as is needed*], haciendo así este mínimo tan libre de irrelevancias (o de elaboración) como lo permita la necesidad de redactarlo y de leerlo sin dificultad y sin error.

Podemos ahora convenientemente distinguir [entre] una elegancia en <[final de la página 81][comienzo página 82]>
el cálculo, que puede hacerlo fácil de usar, y una elegancia en el contexto descriptivo, que puede hacerlo difícil de seguir. En nuestra vida ordinaria estamos acostumbrados a que las indicaciones que nos dicen qué hacer sean confirmadas de varias maneras diferentes, y cuando se nos presenta un mandato que, reducido a su mínima expresión nos indica qué hacer de una vez y en una sola manera, podríamos rehusar cumplirlo, no importa cuán claramente y sin ambigüedad haya sido expresado. (Podemos considerar hasta dónde, en la vida ordinaria, tenemos que observar el espíritu antes que la letra de un mandato, y tenemos que desarrollar nuestra habitual capacidad para interpretar cualquier mandato que se nos hace comparándolo [*screening*] con otras indicaciones de lo que debemos hacer. En las matemáticas tenemos que deshacernos [*unlearn*] de este hábito [a fin de poder] aceptar un mandato literalmente y de una vez.

[sigue]...

[continuación página 82]>

Esta es la razón por la que un autor de matemáticas tiene que esmerarse tanto [*take such pains*] en hacer que sus mandatos se autoricen mutuamente [*to make his injunsctions mutually permissive*]. De lo contrario, todo este esmero [*these pains*], que ciertamente depende del autor, asumirá una escalofriante importancia para el lector [*will fall with sickening import upon the reader*], quien, en virtud de su relación con respecto al autor, puede que no se encuentre en posición de aceptarlo.)

La segunda de las dos ecuaciones primitivas de la aritmética primaria puede derivarse con menos elegancia, pero de un modo que posiblemente resulta más fácil de seguir, si se permite prematuramente la sustitución.

Supóngase que indicamos el estado marcado por una marca [*token*] *m*, y como antes, dejamos que la ausencia de una marca indique el estado sin marcar [*unmarked state*].

Dejemos que un paréntesis alrededor de cualquier indicador [*let a bracket round any indicator*] indique, en el espacio [que está] fuera del paréntesis, el estado que no es el que está indicado dentro del paréntesis [the state other than that indicated inside the bracket].

De este modo

$$[\ m\ ] =$$

y

$$[\quad\ ] = m.$$

<[fin de la página 82][comienzo página 83]>

Sustituyendo, encontramos

$$[\ [\quad\ ]\ ] =$$

que es la segunda ecuación primitiva.

La condición de que uno de los estados primarios sea sin nombre [*shall be nameless*] es obligatoria [*mandatory*] para esta eliminación.

La primera ecuación primitiva puede también derivarse de un modo diferente.

Imagínese a un animal ciego capaz de distinguir solamente el interior del exterior. Un espacio con lo que a nosotros se nos aparece como un número de interiores distintos y un [único] exterior, tal como

[ ] [ ]

le parecerá, después de explorarlo, indistinguible de

[ ]

Las ideas descritas en el presente texto en este punto no van más allá de lo que este animal puede descubrir por si mismo, y así en su mundo, tal cual éste es,

[ ] [ ] = [ ] <[fin de la página 83] [comienzo página 84]>

Podemos notar que incluso si este animal pudiera contar sus cruces [*crossings*], todavía no podrá distinguir dos divisiones de una, aunque ahora tendrá un modo alternativo de distinguir el interior del interior que ya no depende más de saber cuál es cual.

Reconsiderando la primera orden [*command*],

trace una distinción,

advertimos que la misma pudo haber sido igualmente bien expresada con expresiones tales como

sea un distinción,
encuentre una distinción,
vea una distinción,
describa una distinción,
defina una distinción,

o

sea trazada una distinción,

porque hemos llegado [*reached*] aquí a un lugar tan primitivo que activo y pasivo, además de un número de otros opuestos más periféricos, desde hace mucho [*have long since*] se han condensado juntos, y casi cualquier forma de las palabras sugerirá más categorías de las que realmente hay.

[sigue]...

[continuación página 84]>

Capítulo 3

La hipótesis de simplificación es la primera convención *manifiesta* [overt] que se pone en uso antes de haber sido justificada. Pero en el último capítulo tiene un precursor en el mandato 'sea el estado indicado por una expresión el valor de la expresión', que permite atribuirle valor a una expresión [*allows value to an expression*] únicamente en caso de que no menos y no más que un estado sea indicado por la expresión. Tanto el uso del mandato como el de la convención son finalmente justificados en los teoremas de representación. Otros casos de justificación diferida [*delayed*] se encontrarán más tarde, siendo el teorema 16 un ejemplo notable de esto.

Podemos preguntar por qué no justificamos semejante convención de una vez cuando nos es dada. La respuesta, en la mayoría de los casos, es que la justificación (aunque válida) carecería de significado [*would be meaningless*] hasta que no nos hubiéramos primero [*until we had first*]<[fin de la página 84][comienzo página 85]>
familiarizado [*become acquainted*] con el *uso* del principio que requiere justificación. En otras palabras, antes de que podamos razonablemente justificar un principio que se encuentra a un nivel muy profundo [*a deep lying*

principle], necesitamos primero familiarizarnos con la manera en que opera [*to be familiar with how it works*].

Podríamos suponer que esta práctica de justificaciones diferidas está en vigencia en otras partes. Es un hecho notable que en las matemáticas muy pocos teoremas *útiles* permanecen sin ser probados. Por 'útil' no necesariamente quiero decir [algo] que posee aplicaciones prácticas fuera de las matemáticas. Un teorema puede, por ejemplo, ser matemáticamente útil para justificar otro teorema.

Uno de los teoremas más 'inútiles' en las matemáticas es la conjetura de Goldbach. [Sin embargo], no nos encontramos frecuentemente diciéndonos a nosotros mismos 'si sólo supiéramos que todo número par mayor que 2 podría representarse como la suma de dos números primos, deberíamos entonces poder mostrar que...' D. J. Spencer Brown, en una comunicación privada, sugirió que su aparente inutilidad no es exactamente la razón por la cual semejantes teoremas no pueden ser probados, pero es una razón para suponer que si se nos diera hoy una prueba válida, nadie la reconocería como tal, porque nadie se encuentra todavía *familiarizado* con el *fundamento* [ground] sobre el cual una semejante prueba descansaría. Tendremos más que decir sobre esto en las notas de los capítulos 8 y 11.

Capítulo 4

En todas las matemáticas se hace patente, en alguna etapa, que hemos estado por algún tiempo siguiendo una regla sin habernos dado cuenta conscientemente [*without being consciously aware*] de este hecho. Esto podría describirse como el uso de una convención *tácita* [covert]. Un aspecto reconocible del avance de las matemáticas consiste en el progreso de [nuestra] conciencia [*consciousness*] de lo que estamos haciendo, a través del cual lo tácito [*covert*] se hace manifiesto [*overt*]. Las matemáticas son, al respecto, psicodélicas [*psychedelic*].

Mientras más cerca nos encontramos del principio [*beginning*] de aquello que nos propusimos alcanzar [*achieve*], mayor es la probabilidad de que encontremos allí procedimientos que han sido adoptados sin comentario. Su uso puede considerarse como la presencia de un arreglo en la ausencia de un convenio [*agreement*]. Por ejemplo en el enunciado [*statement*] y la prueba del teorema 1 se ha arreglado (aunque no convenido) que escribiremos sobre una superficie plana. Si escribimos sobre la superficie de un torus el teorema no es verdadero. (O para hacerlo verdadero, tendríamos que ser más explícitos.) < [fin de la página 85][comienzo página 86]>

El hecho de que por siglos los hombres han usado una superficie plana para escribir significa que, en este punto del texto, tanto el autor como el lector han sido embaucados [*conned*], sin cuestionarlo, con el supuesto de una superficie de escribir plana. Pero, como cualquier otra suposición, ésta no es incuestionable, y el hecho de que podamos cuestionarla aquí significa que podemos cuestionarla dondequiera [*elsewhere*]. De hecho hemos hallado

[sigue]...

[continuación página 86]>

[aquí] una suposición común, hasta ahora [*hitherto*] sólo sobrentendida [*unspoken*], que subyace en lo que se escribe en las matemáticas, notoriamente, una superficie plana (en términos más generales, una superficie de género [*genus*] 0, aunque veremos más tarde (pp 102 y ss) que esta generalización adicional [*further*] nos fuerza a reconocer otra suposición hasta ahora callada [*silent*]. Más aun, se hace ahora evidente que si se usa una superficie diferente, lo que se escribe sobre la misma, aunque idéntico en su [modo] de marcar [*marking*], puede no ser idéntico en su significado.

En general hay un orden de precedencia entre los teoremas, de modo que los teoremas que pueden probarse más fácilmente con la ayuda de otros teoremas se colocan [*are placed*] para ser probados después de esos otros teoremas. Este orden no es rígido. Por ejemplo, tras haber probado el teorema 3, lo que encontramos en la prueba de éste lo usamos [luego] para probar el teorema 4. Pero los teoremas 3 y 4 son simétricos, y su orden depende sólo de si deseamos pasar [*proceed*] de lo simple a lo complejo o de los complejo a lo simple. El lector podría intentar [*try*], si lo desea, probar primero el teorema 4 sin la ayuda del teorema 3, después de lo cual podrá probar el teorema 3 de un modo parecido [*analogously*] a la manera en que el teorema 4 es probado en el texto.

Se observará que la representación simbólica del teorema 8 es menos fuerte que el propio teorema. El teorema es consistente con

[ ] = ,

mientras que nosotros probamos la versión más débil

[ ] =

La versión más fuerte es claramente [*plainly*] verdadera, pero encontraremos que podemos demostrarla [*demonstrate it*] como una consecuencia dentro del álgebra. Por consiguiente, probamos la versión más débil y la usamos como el primer inicio algebraico [*the first algebraic initial*].<[fin de la página 86][comienzo página 87]>

En el teorema 9 vemos la diferencia entre nuestro uso del verbo *dividir* [divide] y nuestro uso de verbo *escindir* [cleave]. Cualquier división de un espacio tiene como resultado [*results in*] lo que, *de lo contrario* [otherwise], [*serían*] *divisiones indistinguibles de un estado*, que se encuentran todas en el mismo nivel, mientras que un corte [*severance*] o escisión [*cleavage*] configura [*shapes*] *estados distinguibles* [distinguishable states], que se encuentran en niveles diferentes.

Puede uno hacerse [*be gathered*] una idea de las fortalezas [*strengths*] relativas del corte [*severance*] y la división [*division*] a partir del hecho de que la regla del número es suficiente para unificar un espacio dividido, pero no para invalidar/anular [*to void*] un espacio escindido [*cloven*].

Capítulo 5

Al obtener [*in eliciting*] reglas para la manipulación algebraica el texto explícitamente se refiere a la existencia de sistemas de calculación [*calculation*] aparte del [*other than*] sistema descrito. Esta referencia es tanto deliberada como no esencial [*inessential*]. Marca el nivel en el que esos sistemas usualmente se han equipado con sus orígenes falsos, truncos o postulados.

Es intencionalmente que se le informa al lector que, en el sistema de calculación [*calculation*] que estamos construyendo, no nos estamos apartando de [*departing from*] los métodos básicos de otros sistemas. De este modo, a lo que lleguemos [*what we arrive at*], al final, servirá para elucidarlos, además de dotarlos de [*fit them with*] sus verdaderos orígenes. Pero, al mismo tiempo, es importante que el lector vea que la referencia a otros sistemas no es esencial para el desarrollo del argumento en el texto. Porque aquí éste se mantiene en pie por sus propios méritos o cae [por si solo], sin que su validez dependa en modo alguno de su acuerdo [*agreement*] o desacuerdo [*disagreement*] con otros sistemas. Así las reglas 1 y 2, como puede verse a partir de su justificación, no dicen nada que no haya sido ya dicho en el texto. Meramente resumen las órdenes y las instrucciones que serán relevantes para la nueva clase [*kind*] de calculación que estamos a punto de emprender [*undertake*]. [sigue]...

[continuación página 87]>

El reemplazo al que se refiere la regla 2 se confina generalmente a expresiones de variables independientes de forma simple (i.e. literales), y de hecho está así restringido en el texto. Pero la mayor licencia concedida por la regla no está desprovista de aplicaciones con significado [*significant application*], si hiciera falta.

Capítulo 6

Mediante la revelación y la incorporación de su propio origen, el álgebra primaria ofrece un acceso inmediato a la naturaleza de la <[fin de la página 87] [comienzo página 88]>
relación entre operadores y operandos. En el álgebra un operando no es más que una presencia o ausencia conjeturada de un operador.

Esta identidad parcial entre el operando y el operador, que no está confinada a las álgebras booleanas, puede de hecho verse si nos extendemos en descripciones más familiares, aunque en estas descripciones no es tan obvia. Por ejemplo, podemos encontrarla tomando los operadores booleanos v (usualmente interpretado como [la disyunción] 'o' en la lógica, pero utilizado aquí de manera puramente matemática) y [el punto] . (usualmente interpretado como [la conjunción] 'y' de la lógica, pero de nuevo usada aquí de un modo puramente matemático), liberando [*freeing*] su alcance [*scope*] (como se nos autoriza, por el principio de relevancia), liberando el orden de las variables dentro de su alcance (como lo permite el mismo principio), y extrapolándolos matemáticamente al caso [en que no hay] ninguna variable,

	...(a b c)	v .	(a b)	v .	(a)	v .	()	v .
permute	1 1 1	1 1	1 1	1 1	1	1 1		0 1
permute	1 1 0	1 0	1 0	1 0	0	0 0		
permute	10 0	1 0	0 0	0 0				
permute	0 0 0	0 0						

que muestra de manera completamente clara que no tenemos ninguna necesidad de las formas aritméticas 0, 1 (ni de *z*, *u*, ni de *F*, *T*, etc.) puesto que las podemos hacer iguales a () v y () . , respectivamente. Podemos ahora escribir una variable booleana de la forma *a*, *b*, etc. dondequiera que conjeturemos la presencia de una de esas dos partículas fundamentales, pero no sabemos (o no nos importa) cuál. De este modo, las tablas funcionales para v y . con dos variables se vuelven [*thus become*]

(*a* *b*)	v	.		
	(() v	() v)	() v	() v
	(() v	() .)	() .	() v
	(().	() .)	() .	() . ,

dándose por supuesta la permutación [*the permutation being assumed*].

J1, J2 no son ls únicos dos inicios [*initials*] que pueden tomarse para determinar el álgebra primaria. Partiendo del cuarto conjunto de postulados de Huntington vemos [11] que podríamos haber usado C5, C6.

[11] Edward V. Huntington, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35 (1933) 280-5. <[fin de la página 88] [comienzo página 89]>

La demostración [*demonstration*] de J1, J2 a partir de C5, C6 es tanto difícil como tediosa. Esto es debido evidentemente a que encontramos dos principios algebraicos básicos, en uno de los cuales una variable es transplantada a la expresión, y en el otro es eliminada de la misma. Siempre que [*provided that*] mantengamos esos dos principios apartados, las demostraciones subsiguientes no son difíciles. Si se entremezclan, como sucede en las dos ecuaciones de Huntington, entonces puede ser luego difícil desenmarañarlos [*unravelling*].

Aquí nuestra formulación [*expression*] de las ecuaciones de Huntington bajo la forma de C5, C6 no es [igual a] la forma en que él originalmente las expresó [*expressed them*]. [Su trabajo] se vió obstaculizado [*hampered*] por las agobiantes [*crippling*] suposiciones sobre la relevancia del orden y el alcance binario [*binary scope*], con las cuales en ninguna etapa hemos nosotros debilitado el álgebra primaria. Por esta razón encontró que era necesario incluir dos ecuaciones más para completar el conjunto. C5 y C6, consideradas como inicios, son de interés principalmente porque emplean sólo dos variables distintas, , mientras que J1 y J2 emplean tres.

Al principio había yo supuesto que la demostración de C1 era imposible a partir de J1 y J2 tal como se encuentran formuladas [*as they stand*]. En 1965, un alumno, el Sr. John Dawes, produjo una más bien extensa prueba [*proof*] en sentido contrario, así que al año siguiente le puse el problema a mi clase como un ejercicio, y fui recompensado con una demostración [*demosntration*] de lo más elegante producida por el Sr. D. A. Utting. En el texto uso la prueba del Sr. Utting ligeramente modificada.

[sigue]...

[continuación página 89]>

Aunque, superficialmente, puede parecer menos eficiente, al final es más natural y conveniente usar nombres antes que [*rather than*] números para identificar las consecuencias más importantes, como lo es en realidad [*indeed*] con los teoremas, puesto que en general los mismos no forman un conjunto ordenado.

Al nombrar tales consecuencias me he propuesto encontrar lo que parezca apropiado como una descripción del proceso nombrado, como éste aparece en el álgebra, sin hacerle violencia a su origen aritmético. En algunos lugares tanto las formas como los nombres son familiarmente [*recognizably*] similares a los de otros autores que han determinado el álgebra booleana. Hasta ahora, en la mayoría de tales casos el nombre comúnmente usado describe sólo una de las direcciones en que puede darse el paso. Un ejemplo es lo que se llama expansión booleana. En semejante caso, donde el nombre es apropiado <[fin de la página 89] [comienzo página 90]> solamente para el paso dado en una dirección, he introducido un antónimo para la otra dirección, y adoptado [*given*] un nombre genérico para cubrir ambas. En otros casos reconocibles he encontrado lo que me parece ser un nombre más apropiado, tal como ocultación para lo que Whitehead[12] llamó absorción. La parte de la expresión que se oculta no es tanto absorbida por el resto [*remainder*] como eclipsada por éste. Esto puede verse bastante [*quite*] claramente en la aritmética, o alternativamente si la expresión es ilustrada con un diagrama de Venn. Hasta donde alcanza mi conocimiento [*to the best of my knowledge*], Peirce fue el único autor anterior que reconoció como tal lo que llamo posición. La llamó [13] borradura [*erasure*], llamando así la atención otra vez a una sola dirección en que se aplica.

No doy por supuesto que todos los nombres siempre habrán de arraigar [*will stick*]. La familiaridad tiende a producir una suerte de jerga interna [*in-slang*], a menudo más apropiada, en su ámbito [*place*], que lo que se considera académicamente correcto [*proper*] o adecuado [*seemly*]. Por ejemplo, la aplicación en ingeniería de la consecuencia 2 ha producido la palabra más casera ‘criar’ [*breed*], por ‘regenerar’, y ‘revertir’ [*revert*], por ‘degenerar’ [*degenerate*], y es de interés notar que las transformaciones de esta consecuencia son imágenes directas [*immediate*] de lo que Proclo llamó [14] [.......] y [.......], traducidos por Dodds como *procesión* [procession] y *reversión* [reversion].

El hecho de que nombres descriptivos tales como ‘transposición’ e ‘integración’ se aplican de manera diferente en otras partes de las matemáticas (y, en realidad, en otras partes de este libro) no parece ser una razón para evitar su uso en los sentidos definidos en este capítulo. Mientras más profundo es el nivel de una investigación, más difícil se hace encontrar palabras suficientemente potentes [*strong*] para expresar [*cover*] lo que se encuentra allí, y en todos los casos mi uso del lenguaje para describir procesos primitivos recurre [*draws on*] a un mayor poder de significación [*a greater power of signification*] que el que se necesita para sus usos más superficiales y especializados.

Uno de los hechos más hermosos que emergen de los estudios matemáticos <[fin de la página 90][comienzo de la página 91]> es esta relación tan poderosa [*potent*] entre el proceso matemático y el lenguaje corriente. No parece haber ninguna idea matemática de alguna importancia o profundidad que no se refleje [*that is not mirrored*], con una casi misteriosa exactitud, en el uso común de las palabras en su sentido original y hace tiempo olvidado.

El hecho de que una palabra puede tener diversos [*different*] significados, aunque conexos [*related*], y en diferentes pero relacionados niveles de consideración, no hace normalmente que la comunicación se convierta en algo imposible. Al contrario, es evidente que la comunicación de cualesquiera ideas, excepto las más triviales, sería imposible sin ello.

Dado que en este punto del texto las formas fundamentales de la comunicación matemática se encuentran ahora prácticamente completas, puede ser un ejercicio revelador volver a traducir [*retranslate*] en palabras [l*onghand*] algunas de las formas de [escritura] taquigráfica [*shorthand*] desarrolladas mediante la aplicación del canon de la referencia contraída [*contracting reference*]. A tal fin tomamos el enunciado [*statement*] y demostración de la consecuencia 9 (p. 35). En palabras y cifras éste podría rezar [*could run*] así.

La novena consecuencia, llamada transposición de cruce [*crosstransposition*] , o C9 para abreviar, podría ser formulada [*stated*] como sigue:

[continuación *página* 91]>

b cruce *r* cruce cruce todos los *a* [*cross all* a]
cruce *r* cruce cruce 2 *x* cruce
r cruce 2 *y* cruce *r* cruce 2
cruce todos [*cross all*]

expresa el mismo valor que

r cruce *ab* cruce todos los *rxy* cruce 3.

Cuando el paso permitido por esta ecuación se lleva desde la primera [*former*] hasta la última [l*atter*] expresión, se llama cruz-transponer [*to crosstransposе*] o concentrar [*collect*], y cuando se lleva en orden inverso [*in reverse*] se llama cruz-transponer [*to crosstranspose*] o distribuir.

La ecuación puede demostrarse así:

b cruce *r* cruce cruce todos los *a*

cruce *r* cruce cruce 2 *x* cruce
r cruce 2 *y* cruce *r* cruce 2
cruce todos [*cross all*] <[fin de la página 91] [comienzo página 92]>

puede transformarse en [*may be changed to*]

b cruce *r* cruce cruce todos los *a*
cruce *r* cruce cruce 2 *xy*
cruce 2 *r* cruce 2 cruce todos

usando C1, J2, y luego C1 de nuevo. Esto a su vez puede transformarse en

baxy cruce 2 *r* cruce 2 cruce
todos los *rxy* cruce 2 *r* cruce 2
cruce 2

mediante C8 y aplicando luego C1 tres veces, etc.

Podemos observar que, en las expresiones, el lenguaje matemático se ha vuelto completamente visual, no hay ninguna forma propia del [lenguaje] hablado, de modo que al volverla a verbalizar tenemos que *codificarla* [encode] en alguna forma [que resulte] adecuada para el habla corriente [*ordinary speech*]. Así, aunque la forma matemática de una expresión es clara, su forma reverbalizada es oscura.

La principal dificultad al traducir la forma escrita en la verbal proviene del hecho de que en la escritura matemática somos libres de marcar las dos dimensiones del plano, mientras que en el habla podemos marcar solamente la dimensión única del tiempo.

Mucho de lo que hoy es innecesario y se vuelve un obstáculo [*is obstructive*] en las matemáticas parece ser un vestigio de esta limitación de la palabra hablada. Por ejemplo, en el habla corriente, para evitar la referencia directa a una pluralidad de dimensiones, tenemos que fijar el alcance de constantes tales como [la conjunción] ‘y’ o [la disyunción] ‘o’, y esto podemos hacerlo del modo que resulta más conveniente al nivel del primer número plural [*at the level of the first plural number*]. Pero trasladar [*carry over*] esta fijación a la forma escrita es no darse cuenta [*fail to realize*] de la libertad que ofrece una dimensión adicional [*an added dimension*]. Esto a su vez puede llevarnos a pensar [*suppose*] que el alcance binario de los operadores, [que hemos] supuesto [*assumed*] por la conveniencia de representarlos en una [sola] dimensión, constituye algo relevante para la forma real de su operación, lo que, en el caso de operadores simples incluso al nivel verbal, no es [así].

Capítulo 7

En la descripción del teorema 14 ‘la constante’ se refiere a la constante operativa [*operative*]. Hay dos constantes en el cálculo, <[fin de la página 92] [comienzo página 93]> una marca [*mark*] u operador [*operator*], y un espacio en blanco [*blank*] o vacío [*void*]. Al referirnos a ‘la constante’ sin hacer ninguna salvedad [*without qualification*] usualmente se entenderá [*will usually be taken to*] [que nos interesa] denotar el operador más bien que [*rather then*] el vacío [*void*]. [sigue]...

[continuación página 93]>

Capítulo 8

En el texto, hemos distinguido ya entre demostración y prueba. Al hacer esta distinción, que parece completamente natural, vemos de inmediato que una prueba nunca puede justificarse de la misma manera que una demostración. Mientras que en una demostración podemos ver que las instrucciones ya registradas son apropiadamente obedecidas, no podemos aprovecharnos [*avail ourselves*] de este procedimiento en una prueba.

En una prueba estamos tratando con algo [*dealing in*] en términos que están fuera del cálculo, y por ende no susceptibles [*amenable*] [de sujetarse] a sus instrucciones. En cualquier intento de hacer que las pruebas mismas queden sujetas a instrucciones, lo logramos [*we succeed*] solamente al costo de construir [*making*] otro cálculo, dentro del cual se aloja [*is cradled*] el cálculo original, y fuera del cual veremos de nuevo formas que son susceptibles de prueba, pero no de demostración.

La validez de una prueba descansa así, no en nuestra común motivación por un conjunto de instrucciones [*our common motivation by a set of instructions*] , sino en nuestra común experiencia de un estado de cosas [*state of affairs*]. Esta experiencia usualmente incluye la capacidad [*ability*] de razonar que ha sido formalizada en la lógica, pero no queda confinada a la misma. Casi todas las pruebas, ya sean acerca de un sistema que contenga números o de uno que no los incluya, utilizan la capacidad común de computar, i.e. de contar* en una u otra dirección [*in either direction*], y las ideas que surgen de [*stemming from*] de nuestra experiencia de esta capacidad.

Parece algo que se presta a cuestionamiento por qué consideramos la prueba de un teorema como [poseyendo una certidumbre] equivalente [*amounting*] al mismo grado de certeza de la demostración de una consecuencia. No es esta una cuestión que admita, a primera vista, una respuesta fácil. Si hay una respuesta posible, ésta parecería radicar [*lie*] en el concepto de experiencia. Adquirimos [*gain*] experiencia de los procesos vivientes de representación [*living representative processes*], en particular de <[fin de la página 93 (sin incluir la nota al pie de página)] [comienzo página 94]> de [un] argumento y de contar hacia delante y hacia atrás en unidades, y a través de esta experiencia cobra completa certeza [become quite certain], en nuestras mentes, la validez [*validity*] de usarla para sustanciar una prueba. Pero, puesto que los procedimientos de la prueba todavía no se encuentran en si mismos codificados en un cálculo (aunque pueden finalmente llegar a estarlo), nuestra certeza en esta etapa tiene que considerarse intuitiva. Podemos lograr una demostración simplemente con seguir instrucciones, aunque no estemos familiarizados con el sistema en que las instrucciones son obedecidas. Pero al probar un teorema, si no hemos aún codificado la estructura de la prueba *en* la forma de un cálculo, tenemos al menos que estar familiarizados o ser experimentados en cualquiera que sea [*whatever it is*] lo que consideramos [que constituye] el *fundamento* [ground] de la prueba, o de lo contrario no la *veremos* como una prueba.

Otro modo de mirar [*regard*] la relación entre una prueba y una demostración, que le confiere más fuerza [*adds support*] a la proposición de que el grado de certeza de una prueba es igual al de una demostración, es considerarla como la frontera [*boundary*] que divide el estado de prueba [*the state of proof*] del estado de demostración. Una demostración, recordemos, ocurre dentro del cálculo; una prueba, fuera de éste. La frontera entre ambos es de este modo una frontera compartida, y es aquello a lo cual nos aproximamos, en una u otra dirección, según que estemos demostrando una consecuencia o probando un teorema. Así puede verse que las consecuencias y los teoremas guardan entre si una relación de adecuación [*fitting*].

Pero la frontera que marca su relación, aunque compartida, se ve desde un solo lado (como la frontera existencial (véanse pp 124 y ss)), puesto que si nosotros conocemos el fundamento en que descansa una demostración (i.e. siempre que [*provided that*]

[sigue]…

[continuación página 94]>

entendamos las razones formales de las ecuaciones iniciales que empleamos, como distintas de las [razones] pragmáticas, de modo que no tengamos que postularlas), la demostración puede verse como una prueba por implicación, aunque una prueba nunca es vista como una demostración. De hecho, observamos que [una] demostración guarda [*bears*] [con respecto a] [una] prueba la misma relación que guarda [una] ecuación inicial [con respecto a] [un] axioma, pero debemos también notar que la relación es evidente sólo en la aritmética, y se pierde cuando nos alejamos de ésta y nos adentramos en el álgebra [*is lost when we make the departure into algebra*]. Esta parece ser la razón por la que las álgebras son presentadas comúnmente sin axiomas, en el sentido propio de la palabra.

El hecho de que una prueba es una manera de hacer aparentemente obvio <[fin de la página 94] [comienzo página 95]> lo que de modo latente ya era así resulta ser de cierto interés matemático. Aunque para un teorema dado hay cualquier número de pruebas distintas, todas éstas pueden ser, aun así, difíciles de encontrar. En otras palabras, podemos empezar [*set about*] a tratar de probar un teorema en un gran número de maneras equivocadas [*wrong*] antes de dar con una que sea correcta.

Incluso la analogía de buscar alguna cosa no puede ser, en este contexto, cabalmente exacta [*quite right*]. Porque lo que encontramos, finalmente, es algo que hemos sabido, y de lo cual muy bien podríamos haber estado conscientemente enterados [*consciously aware*] todo el tiempo [*all along*]. De modo que, en este sentido, no estamos buscando algo que ha estado alguna vez oculto. La idea de estar llevando a cabo una búsqueda puede ser de poca ayuda [*unhelpful*], o incluso decididamente [*positively*] un obstáculo [*obstructive*], puesto que las búsquedas son en general organizadas para encontrar algo que ha estado antes oculto, y por lo mismo, no expuesto a la vista [*not open to view*].

Al descubrir una prueba, tenemos que hacer algo más sutil que una búsqueda. Tenemos que llegar a ver la *relevancia* [que], con respecto a cualquier enunciado que deseamos justificar, [posee] algún hecho completamente a la vista, y del cual estamos, por ende, constantemente conscientes [*aware*]. Aunque podamos saber cómo emprender la búsqueda de algo que *no* podemos ver, puede escapársenos más fácilmente, a pesar de nuestro esfuerzo, la sutileza de la técnica de tratar de 'encontrar' algo que ya *podemos* ver.

Este puede ser el momento oportuno [*helpful*] para introducir una distinción entre seguir el curso de un argumento y entenderlo [*understand it*]. Considero el entender [*understanding*] como la experiencia de aquello que es comprendido [*understood*] en un contexto más amplio [*wider*]. En este sentido, no entendemos completamente un teorema hasta que no podemos [verlo] contenido en otro teorema más general. No obstante, podemos seguir su prueba, en el sentido de llegar a ver su evidencia, sin entenderlo en el más amplio sentido sobre el cual puede apoyarse [*may rest*].

Seguir [un razonamiento] y entenderlo, al igual que demostrar y probar, son a veces considerados erróneamente como sinónimos. Con mucha frecuencia se juzga que una persona no ha entendido un argumento, un proceso, una doctrina, cuando lo cierto del caso es que no siguió [el curso de su exposición]. Pero su falla en seguirlo puede ser completamente deliberado, y puede surgir del hecho de que *ha* entendido lo que le fue presentado, y no sigue [su curso] porque ve un camino [*path*] más corto , o aparte de eso [*otherwise*], más aceptable, aunque todavía podría no saber cómo comunicarlo.<[fin de la página 95] [comienzo página 96]>

De este modo, el seguir [*following*] puede asociarse particularmente con la doctrina, y una doctrina demanda adhesión a una manera particular de decir o hacer alguna cosa. Entender tiene que ver con el hecho de que lo que alguna vez se dice o se hace siempre puede decirse o hacerse de una manera diferente, y sin embargo todas esas maneras continúan siendo lo mismo.

Capítulo 9

Observamos que la idea de completitud no puede aplicarse a un cálculo como un todo, sino solamente a una representación de una determinación del mismo por otro. Lo que se cuestiona. En realidad, es la completitud de una forma alternativa de expresión.

Un hecho sobre el cual Gödel llamó la atención [5], es que un álgebra que incluya representaciones de la adición y la multiplicación *no puede* dar cuenta cabalmente de una aritmética de los números naturales en la que estas operaciones se tomen como elementales. Así, en la teoría de los números, aunque ciertas relaciones puedan probarse, no puede construirse ningún álgebra en la que la totalidad de tales relaciones sean demostrables.

[sigue]…

[continuación página 96]>

El advenimiento del teorema de Gödel nunca me ha parecido ser una razón para desesperar, como algunos investigadores lo han considerado, sino más bien una ocasión para celebrar, puesto que el mismo confirma lo que los hombres de las matemáticas han descubierto [*found*] a través de la experiencia, particularmente, que la aritmética corriente es un terreno más fértil [*richer*] para la investigación que el álgebra corriente.

Capítulo 10

Es usual probar la independencia de las ecuaciones iniciales indirectamente[15] . Comúnmente no se observa, aunque se hace [*it becomes*]<[fin de la página 96] [comienzo página 97]> evidente cuando lo consideramos, que con un conjunto de sólo dos inicios [*intials*], se tiene siempre al alcance una prueba directa de su independencia, y ofrezco una prueba semejante en el texto.

Con el inicio faltante [*with the missing initial*], una prueba de independencia puede ser propiamente considerada una prueba de incompletitud del cálculo.

Capítulo 11

La cuestión de si las funciones de si mismas son o no permisibles [*allowable*] ha sido larga y tediosamente discutida por muchas autoridades [cf 8] desde que se publicó *Principia Mathematica*. El argumento de Whitehead-Russell para excluirlas [*for disallowing them*] es bien conocido. Es el tema de múltiples [*a number of*] comentarios de Wittgenstein [4, propositions 5.241 ss.] (Utilizo la traducción de Pears-McGuinness para lo que sigue).

Una operación, dice Wittgenstein, no es la marca de una forma, sino de una relación entre formas. Wittgenstein ve aquí lo que llamo la marca de distinción entre estados, que él llama formas, y también ve su conexión con la idea de operación. Luego observa [*remarks*] [5.251] que

> una función no puede ser su propio argumento, mientras que una operación puede tomar uno de sus propios resultados como su base.

En sentido estricto, esto se aplica sólo a funciones con un único valor [*single-valued functions*]. Si permitimos funciones inversas e implícitas, entonces la aserción de arriba no es verdadera [*is untrue*]. Un función de una variable, en el sentido más amplio con que la misma es definida en este capítulo, es el resultado de un conjunto posible de operaciones sobre la variable. De este modo, si una operación puede tomar su propio resultado como base, la función determinada por esta operación puede ser su propio argumento.

A la luz de este relajamiento [*relaxation*] [de las restricciones], procederé a examinar con algún detalle la analogía entre las ecuaciones booleanas y las de un álgebra numérica corriente..

Boole sostuvo[16] que que la ecuación con la que definía lo que él llamaba la ley de dualidad, particularmente [*notably*]

$$x^2 = x,$$ <[fin de la página 97] [comienzo página 98]>

es de segundo grado. Así lo es, como está formulada [*as stated*], pero mediante la misma [*by it*] él determina que, en su notación, todas las ecuaciones de grado >1 se reducirán al primer grado. En otras palabras, es una ecuación de segundo grado sólo al nivel descriptivo, no en el álgebra misma.

El carácter espurio de su presunto [*alleged*] grado, cuando se la considera en el álgebra misma, es revelado por la aserción que hace Boole en una nota al pie de página [p 50] de que una ecuación de tercer grado carece de interpretación en su álgebra. En realidad la tiene, como veremos al momento, pero Boole parece en este punto haber sido superado [*overcome*] por su notación que usa formas numéricas para un álgebra que es esencialmente no numérica.

La ecuación de Boole

$$x^2 = x$$

es el análogo, en el álgebra primaria, de

$$aa = a.$$

Esto, como veremos, es una ecuación de primer grado, siendo expresable sin subversión [*being expressible without subversion*]. La forma real de la analogía con un álgebra numérica puede ilustrarse como sigue.

Supóngase

$$px^2 + qx + r = 0$$

[sigue]...

[continuación página 98]>

donde *p, q, r* pueden representar números racionales. Podemos reformular [*re-express*] esta ecuación en la forma

F1 $$x^2 + ax + b = 0$$

llamando $q/p = a$ y $r/p = b$, y puede entonces ser además [*further*] transpuesta en

[ ]

F2 = [ ]

[ ]

.... <[fin de la página 98] [comienzo página 99]>

En un álgebra booleana correctamente [*properly*] se nos niega el modo [*mode*] de F1, pero se nos permite el modo de F2, que es continuo o, si lo queremos ver así, subversivo. De esta manera una ecuación de cualquier grado puede no sólo ser construida [*constructible*] sino que tiene además significado [*meaningful*] en un álgebra booleana, aunque no necesariamente en la forma primaria de ésta. Para alcanzar un grado más alto [*higher*] todo lo que necesitamos hacer es añadir una subversión distinta. Las dos ecuaciones de moduladores [*modulator equations*] al final del capítulo son ambas de grado 2. Fueron desarrolladas primero en colaboración con el Sr. D J Spencer Brown, para circuitos de propósitos especiales en computadoras [*special-purpose computer circuits*].

Los circuitos representados por esas ecuaciones, estando los últimos actualmente en uso por *British Railways* [Ferrocarriles Británicos], constituyen [*comprise*], hasta donde sabemos, una primera aplicación de cada uno de dos inventos, en particular, la primera construcción de un dispositivo que cuenta exclusivamente [*entirely*] mediante [*by*] 'lógica' (i.e. sólo con interruptores [*switches*], y sin retardadores [*delays*] artificiales de tiempo, tales como condensadores [condensers] eléctricos) y. adicionalmente, el primer uso, en un circuito de conmutación [*switching circuit*], de valores booleanos imaginarios en el curso de la construcción de una respuesta real. Esto último podría en efecto constituir el primer uso de tales valores imaginarios para cualquier propósito, aunque tengo la sospecha [*it is my guess*] de que Fermat (quien era aparentemente demasiado buen matemático como para reclamar falsamente haber encontrado una prueba) los utilizó en la prueba de su gran teorema, de ahí la 'verdaderamente extraordinaria' naturaleza de su prueba, así como de su extensión [*length*].

El hecho de que los valores imaginarios *pueden* usarse para razonar en dirección a [*towards*] una respuesta real y cierta, unido [*coupled*] al hecho de que los mismos *no son* hoy usados así en el razonamiento matemático, unido además al hecho de que ciertas ecuaciones sencillamente [*plainly*] *no pueden* resolverse sin el uso de valores imaginarios, significa que ***debe** de haber enunciados matemáticos* (cuya verdad o no verdad es de hecho perfectamente decidible) *que no pueden ser decididos mediante los métodos de razonamiento a los que nosotros mismo nos hemos limitado*.

Hablando en términos generales, si confinamos nuestro razonamiento a una interpretación únicamente de ecuaciones booleanas de primer grado, debemos *esperar* encontrar teoremas que siempre desafiarán [toda] decisión, y el hecho de que parece que encontramos tales teoremas en la aritmética común puede servir, aquí, como una confirmación práctica de esta obvia <[fin de la página 99] [comienzo página 100]> predicción. Para confirmarla teoréticamente, sólo necesitamos probar (1) que tales teoremas *no pueden* ser decididos mediante un razonamiento de primer grado, y (2) que *pueden* ser decididos mediante un razonamiento de un grado mayor. (2) sería por supuesto probado suministrando [*providing*] una prueba tal de uno de esos teoremas.

Puedo decir que creo que al menos uno de esos teoremas será dentro de poco decidido mediante los métodos bosquejados [*outlined*] en el texto. En otras palabras, creo que he reducido su decisión a un [mero] problema técnico que se encuentra perfectamente [*well*] dentro de la capacidad de un matemático corriente que esté preparado y cuente con el patrocinio u otros medios para emprender esta labor. [sigue]...

[continuación página 100]>

Cualquier ecuación de segundo grado uniformemente [*evenly*] subvertida podría, alternativamente, ser llamada uniformemente informada. Podemos verlo a través de [*over*] una sub-versión (darle vuelta debajo [*turning under*]) de la superficie sobre [*upon*] la cual está escrita, o alternativamente, como una in-formación [*in-formation*] (formación adentro de [*formation within*]) de lo que [la ecuación] expresa.

Una ecuación tal se encuentra así informada en el sentido de tener su propia forma dentro de si misma, y al mismo tiempo informada en el sentido de recordar lo que le ha sucedido en el pasado.

No hace falta suponer que es exactamente así como la memoria tiene lugar en un animal, pero existen [*there are*] ciertamente en las computadoras electrónicas las así llamadas [*so-called*] memorias construidas de esta manera, y los ingenieros han construido semejantes memorias in-formadas [*in-formed*] con retransmisores [*relays*] magnéticos durante la mayor parte del presente siglo [siglo XX].

Podemos quizás considerar [*look upon*] semejante memoria, en esta simplificada in-formación [*in-formation*], como un precursor de las formas de memoria e información más complicadas y variadas [que encontramos] en el hombre y los animales superiores. Podemos también mirar [*regard*] en el mismo espíritu otras manifestaciones de las formas clásicas de la ciencia física o biológica.

De este modo, no nos imaginamos que la sucesión [*train*] de ondas emitida por una formación escalonada [*echelon*] finita excitada sea exactamente como la sucesión de ondas emitida por una partícula física excitada. Por una parte [*for one thing*], la forma de la onda de una formación escalonada es cuadrada, y por otra, se emite sin energía [*it is emitted without energy*]. (Necesitaríamos, supongo, alejarnos de la forma al menos un paso más [*to make at least one more departure fron the form*] antes de llegar a una concepción de la energía siguiendo en esta dirección). Lo que en esta etapa vemos en la formas de expresión, <[fin de la página 100] [comienzo página 101]> aunque reconocibles, podrían ser considerados como precursores simplificados de aquello que en la ciencia de la física tomamos por lo real [*what we take in physical science, to be the real thing*]. Aun así, su precisión y su cobertura es impresionante [*striking*]. Por ejemplo, si en vez de considerar la secuencia de ondas emitida por la expresión de la Figura 4, consideramos la propia expresión, en su estado inmóvil [*quiescent*], vemos que se compone de ondas estacionarias [*standing*]. Por lo tanto, si lanzamos [*shoot*] una semejante expresión a través de su propio espacio representativo, al pasar un punto dado se hará observable en ese punto como una simple oscilación de una frecuencia proporcional a la velocidad de su paso [*passage*]. Hemos así llegado ya, incluso en esta etapa, a un notable y estraodinario [*striking*] precursor de las propiedades de onda de la materia.

Podemos ver [*look upon*] tales manifestaciones como las semillas formales, los antecesores existenciales de lo que, en un estado menos central, bajo condiciones menos ciertas [*certain*], tiene que suceder [*must come about*]. Especialmente hoy hay una tendencia a mirar [*regard*] la existencia como la fuente de la realidad y de este modo como un concepto central. Pero tan pronto como se la examina formalmente (cf Apéndice 2), se ve que la existencia* es altamente periférica [*peripheral*], y como tal, especialmente corrupta (en el sentido formal) y vulnerable. El concepto de verdad es más central, aunque todavía reconocible como periférico. Si la debilidad de la ciencia de hoy es que se centra en la existencia, la debilidad de la lógica actual [*present-day*] es que se centra en la verdad.

A lo largo de este ensayo, no encontramos ninguna necesidad del concepto de verdad, aparte de dos apariciones evitables (verdad = susceptible de prueba) en el contexto descriptivo. En ningún punto, por decir lo menos, la misma es un habitante [*inhabitant*] necesario de las formas de calcular [*calculating forms*]. Estas formas son así no sólo los precursores de la existencia, sino también los precursores de la verdad.

Me temo que lo que ha demorado tanto [*so held up*] el desarrollo de la lógica y de sus matemáticas, es el bloque intelectual[*intellectual block*] con el cual la mayoría de nosotros tropieza allí donde, para experimentar [*to experience*] claramente el mundo, tenemos que dejar [*abandon*] la existencia por la verdad, la verdad por la indicación [*indication*], la indicación por la forma, y la forma por el vacío [*void*].

[sigue]...

* *ex* = fuera [*out*], *stare* = encontrarse [*stand*]. Así existir puede considerarse como encontrarse afuera [*stand outside*], estar exiliado [*to be exiled*].

[continuación página 101]

¿Qué status posee entonces la lógica en relación con las matemáticas? Podemos anticipar por un momento el Apéndice 2, a partir [*from*] <[fin de la página 101] [comienzo página 102]>del cual vemos que los argumentos que usamos para justificar las formas de calcular [*calculating forms*] (e.g. en las pruebas de teoremas) *pueden justificarse a si mismos poniéndolos en la forma del cálculo*. Así puede verse que el proceso de justificación se alimenta a si mismo [*can thus be seen to feed upon itself*], y esto puede encerrar [*comprise*] la más poderosa razón contra la creencia de que la codificación de un proceso de prueba proporciona evidencia a favor de las pruebas dentro del mismo [*lends evidential support to the proofs in it*]. Todo lo que hace es darles coherencia. Un teorema no es probado mediante la lógica y la computación, más de lo que [puede decirse que] un soneto es escrito con la gramática y la retórica, o que una sonata es compuesta mediante la armonía y el contrapunto, o un cuadro [*picture*] pintado mediante la composición [*balance*] y la perspectiva. La lógica y la computación, la gramática y la retórica, la armonía y el contrapunto, la composición y la perspectiva pueden verse en la obra *después* que ésta es creada, pero estas forma son, en un último análisis, parasíticas, carentes de existencia separadas de la creatividad de la obra en si. De este modo la relación de la lógica con las matemáticas se ve que es la de una ciencia aplicada [con respecto a] a la de su más puro fundamento, y toda ciencia aplicada se ve que extrae [*is seen as drawing*] [su] sustento de un proceso de creación con el cual puede combinarse para producir una estructura [*give structure*], pero del cual no puede apropiarse [*but which it cannot appropriate*].

Capítulo 12

Imaginémonos que en vez de estar escribiendo sobre una superficie plana, estuviéramos escribiendo sobre la superficie de la Tierra. Haciendo caso omiso de las cuevas de conejos, etc., podemos considerarla una superficie de género 0. Supóngase que escribimos

$$[\ [b]\ \ [c]\ ]\ a.$$

Para hacerlo legible desde otro planeta, lo escribimos bien grande. Supóngase que trazamos el paréntesis [*bracket*] exterior alrededor del ecuador, y hacemos que los parénesis que encierran a b y a c sigan las líneas costeras de Australia y la Isla Sur de Nueva Zelanda respectivamente.

Arriba está la expresión como aparecerá desde algún lugar en el hemisferio norte, digamos Londres. Pero viajemos [a otro sitio].<[fin de la página 102] [comienzo página 103]>

Al arribar a Ciudad del Cabo vemos

$$[\ b\ ]\ [\ c\ ]\ [\ a\ ]\ .$$

Navegando hasta Melbourne, veremos

$$[\ [a]\ \ [c]\ ]\ b,$$

y siguiendo desde allá hasta Christchurch, vemos

$$[\ [a]\ \ [b]\ ]\ c.$$

Estas cuatro expresiones son distintas y no equivalentes. Así se hace evidente que no basta meramente con escribir una expresión, incluso sobre una superficie de género 0, y esperar que la misma sea comprendida. Tenemos también que indicar en dónde se encuentra parado el observador en relación a la expresión. Al escribir sobre un plano, la ambigüedad no se hace patente porque tendemos a ver la expresión desde fuera del paréntesis situado en el extremo exterior [*outermost*] de la misma. Cuando está escrita sobre la superficie de una esfera, puede no haber manera de decir cuál de los paréntesis se supone estar en ese extremo. En tal caso, a los efectos de hacer que una expresión tenga significado tenemos que añadir un indicador para presentar un lugar desde el cual el observador es invitado a mirarla.

En el tercer experimento observamos un modo alternativo (aunque menos potente) de usar el principio de relevancia. Mediante el uso normal del principio pudimos obliterar las marcaciones [*markings*] adicionales (puesto que cada estado es marcado de manera idéntica) y llegar al círculo único [*the single circle*] en un solo paso, mientras que en el experimento en que seguimos el curso más débil para obliterar la línea de <[fin de la página 103] [comienzo página 104]> distinción entre las marcaciones, necesitamos luego un paso más para llegar al círculo único.

Adviértase que ambos modos de simplificación son *diferentes* de los métodos de cancelación y condensación adoptados para el cálculo, aunque surgen de éstos y, por ende, no son inconsistentes con los mismos. A partir del experimento empezamos a ver de hecho cómo todos los principios de orientación [*constellar*] por medio de los cuales guiamos [*navigate*] el curso de nuestras travesías [*journeys*] hacia afuera de [*out of*] la forma y hacia dentro de [*in to*] la misma surgen [*spring*] de la reductibilidad [*reducibility*] última de los números y de la evitabilidad de las relaciones. Sólo deteniendo o fijando el uso de estos principios en alguna etapa

[sigue]...

[continuación de la página 104]>
es como podemos arreglárnosla [*manage*] para mantener de algún modo un universo en cualquier forma [*to maintain a universe in any form at all*], y nuestra comprensión de semejante universo viene no de descubrir su actual apariencia, sino de recordar lo que originalmente hicimos para crearlo [*to bring it about*].

De esta manera el cálculo mismo puede cumplirse [*can be realized*] como un recuerdo [*recollection*] directo. Cuando dejamos el estado central de la forma, yendo hacia afuera y en el modo de la imagen [*imagewise*] hacia la condición periférica de la existencia, vimos cómo las leyes de llamamiento [*calling*] y cruzamiento [*crossing*], que armaron [*set*] el escenario [*stage*] para nuestra travesía a través del espacio de representación [*through the representative space*], se volvieron estrellas fijas [*fixed stars*] en el familiar drama [*play*] del tiempo. Nuestros proyectados temores y esperanzas de su expiación final [*their ultimate atonement*], que llamamos teoremas, se hicieron su elenco secundario [*became their supporting cast*]. Al final. Cuando reingresamos a la forma, todos son justificados y agotados [*expended*]. Se necesitaron sólo mientras estuvieron en duda. Cuando [ya] no puede dudarse de los mismo, pueden ser descartados.

Retornando, brevemente a la idea de los precursores existenciales, vemos que si aceptamos su forma como [algo] endógeno a la menos primitiva estructura identificada con la realidad, en la ciencia de hoy, no podemos escapar a la conclusión de que lo que ahora es comúnmente visto [*regarded*] como real consiste, en su presencia misma [*in its very presence*], meramente de símbolos [*tokens*] o expresiones. Y puesto que los símbolos y las expresiones son consideradas ser *de* algún (otro) sustrato, así el propio universo, como lo conocemos, puede considerarse ser la expresión de una realidad distinta de él mismo [*an expression of a reality other than itself*].

Consideremos entonces, por un momento, el mundo como lo describen los físicos. El mismo consiste de un cierto número de partículas fundamentales que, si se lanzan a través de su propio espacio, aparecen como ondas, <[fin de la página 104] [comienzo página 105]> y son así (como en el Capítulo 11), de la misma estructura laminada que las perlas o las cebollas, y otras formas de ondas llamadas electromagnéticas que, en virtud de la navaja de Occam, es conveniente considerar desplazándose [*travelling*] en el espacio con una velocidad estándar. Todas éstas aparecen sujetas [*bound*] a ciertas leyes naturales que indican la forma de su relación.

Ahora, el propio físico [*the physicist himself*] que describe todo esto, está él mismo, según su propia explicación [*in his own account*], construido de [la misma materia]. Se encuentra, en suma, hecho de un conglomerado de las mismas partículas que describe, obedeciendo y sometido juntamente, no más, ni tampoco menos, a tales leyes naturales que él mismo se ha ingeniado para hallar y registrar.

Esto en verdad es asombroso.

No tanto en vista de lo que ve, aunque esto puede de por si parecer bastante fantástico, sino con respecto al hecho de que *pueda en absoluto* ver [algo].

Pero *a fin* de así hacerlo, evidentemente tiene primero que partirse a si mismo [*cut itself up*] al menos en un estado que ve, y al menos en un otro estado que es visto. En esta condición escindida [*severed*] y mutilada, cualquiera que sea lo que ve es *sólo parcialmente* a si mismo. Podemos considerar que el mundo es indudablemente él mismo (i.e. no es distinto de si mismo), pero, en cualquier intento de verse a si mismo como un objeto, de manera igualmente indudable tiene que actuar* de modo de hacerse a si mismo distinto de si mismo y, por consiguiente, falso para si mismo. En esta condición siempre se eludirá parcialmente a si mismo.

Parece difícil encontrar una respuesta aceptable para la pregunta de cómo o por qué el mundo concibe un deseo, y descubre una capacidad, para verse a si mismo, y parece padecer

*Cf [ ] = actor, antagonista. Puede notarse la identidad de la acción y la agonía [*agony*].

[sigue]...

[continuación página 105]>
el proceso. Quizás en vista de *la forma* en que *nosotros* mismos nos *consideramos* que *existimos* actualmente [*in view of* the form *in which we presently* take *ourselves* to exist], el misterio *surge de* nuestra insistencia en *formular* una pregunta donde no hay, en realidad, *nada* que preguntar. Sin embargo, si tal deseo, capacidad y experiencia sufrida son admitidos, puede parecer que el estado o condición que surge como resultado es, de acuerdo <[fin de la página 105] [comienzo página 106]> con las leyes aquí formuladas, absolutamente inevitable. . En este sentido, al menos, no hay ningún misterio. Nosotros, como representantes [*representative*] universales, *podemos* registrar las leyes universales lo suficiente [*far enough*] como para decir

> y así sucesivamente, así sucesivamente al final [*eventually*] construirás el universo, en todos sus pormenores y potencialidad [*in every detail and potentiality*], como lo conoces ahora; pero luego [*then*], de nuevo [*again*], lo que [habrás] construido no será todo, porque para el momento en que hayas alcanzado lo que es ahora, el universo se habrá expandido [*expanded*] dentro de un nuevo orden para contener lo que será entonces [*then*].

En este sentido, con respecto a su propia información, el universo tiene [*must*] que expandirse [*expand*] para escapar del telescopio a través del cual nosotros, que somos él [*who are it*], estamos tratando de capturar [al universo mismo], que es nosotros. La serpiente se come a si misma, el perro persigue su [propia] cola.

De este modo, el mundo, cada vez que se manifiesta [*appears*] como un universo* físico, a nosotros, sus representantes, tiene siempre que parecernos que está jugando consigo mismo una suerte de juego del escondite [*hide-and-seek*]. Lo que se revela será ocultado, pero lo que se oculta será de nuevo revelado. Y puesto que nosotros mismos lo representamos, esta ocultación se hará patente [w*ill be apparent*] en nuestra vida en general, y en las matemáticas en particular. Lo que trato de mostrar en el capítulo final es el hecho, que en realidad supimos siempre [*all along*], de que los dos axiomas mediante los cuales fijamos nuestro curso eran mutuamente compatibles [*permissive*] y concordantes [*agreeable*]. En una cierta etapa de nuestro argumento, de alguna manera astutamente [*cleverly*] nos ocultamos [*obscured*] a nosotros mismos este conocimiento, a fin de que pudiéramos entonces guiarnos [*navigate*] a nosotros mismos a través de un viaje [*journey*] de redescubrimiento, consistente en una serie de justificaciones y pruebas con el propósito de ofrecernos [*rendering*] otra vez, a nosotros mismos, evidencia irrefutable de lo que ya sabíamos.

De este modo, al encontrarnos de nuevo con ello, a la luz de lo que tuvimos que hacer para volverlo [*render it*] aceptable, vemos que nuestro viaje, como algo preconcebido [*in its preconception*], era innecesario, aunque, una vez que lo emprendimos, su curso formal era inevitable.

**unus* = uno, *vertere* = volverse [*turn*] Cualquier universo dado (o cautivado) [*captivated*]) es lo que se ve como el resultado de dar origen a un cambio [*a making of one turn*], y así [*thus*] *es la apariencia* de cualquier primera distinción, y sólo un aspecto menor [*minor*] de todo ser [*all being*], patente y no patente [*apparent and non-apparent*]. Su particularidad es el precio que pagamos por su visibilidad.

NOTAS AL PIE DE PÁGINA

Pág. 88: [11] Edward V. Huntington, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35 (1933) 280-5.

Pág. 90: [12] Alfred North Whitehead, *A treatise on universal algebra* [Un tratado de álgebra universal], Vol. I, Cambridge, 1898, p. 36.

[continuación Notas página 90]

[13] Charles Sanders Peirce, *Collected Papers* , Vol. IV, Cambridge, Massachusetts, 1933, pp. 13-18.

[14] [ ] con una traducción de E. R. Dodds , 2da. Edición, Oxford, 1963.

Pág. 93:

* Aunque *contar* [count] se basa [*rests*] en *putare* = podar [*prune*], corregir, (y de ahí) calcular [*reckon*], la palabra *razón* proviene de *reri* = contar, calcular. De este modo las actividades de razonar y de computar en una prueba fueron originalmente consideradas como una sola. Podemos advertir además que argüir se basa en *arguere* = clarificar (literalmente convertir en plata [*make silver*]). Encontramos así toda una constelación de palabras que tiene que ver con el proceso de *lograr hacerlo correctamente* [getting it right].

Pág. 96: [15] siguiendo a Edward V. Huntington, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 5 (1904) 288--309.

Pág. 97: [16] George Boole, *An investigation on the laws of thought* [Una investigación sobre las leyes del pensamiento], Cambridge, 1854, p. 50.

APÉNDICE 2

EL CÁLCULO INTERPRETADO PARA LA LÓGICA

El cálculo de las indicaciones consiste en un conjunto de maneras de indicar uno u otro de los dos estados distinguidos por la primera distinción, así podremos encontrar una aplicación del mismo para las formas indicativas de cualquier clara distinción de esta índole [*kind*]. Tiene que cumplirse [*apply*] en casos donde las puertas pueden abrirse o cerrarse, o donde los circuitos [*switches*] pueden estar encendidos o apagados, o donde las línea pueden estar despejadas o bloqueadas. También se aplicará a una estructura de lenguaje en la que las oraciones pueden ser verdaderas o falsas.

Considerando la cuestión de su aplicación a la luz de la dirección de donde hemos venido, no es de inmediato obvio que el cálculo tendrá una aplicación *útil* o *reveladora* para cualquiera de esos casos, aun cuando podemos ver que el mismo se cumplirá [*will apply*]. En el ensayo, el cálculo ha sido construido en una serie de formas y desviaciones [*departures*], y aunque lo que hemos encontrado allí puede parecer curioso, así puede igualmente parecerlo el por qué nos tomamos el trabajo de buscarlo.

El hecho es que, al emprender el desarrollo del cálculo en esta dirección, el autor está haciendo el viaje por segunda vez, mientras que para el lector podría ser que fuera su primera travesía. El viaje anterior del autor fue en la dirección opuesta, desde las formas de interpretación que estamos ahora a punto de discutir, hacia la forma de indicación de la cual las mismas surgen [*arise*]. Así el autor está consciente [*aware*], aunque el lector podría no estarlo aún, de cómo y dónde [la travesía] terminará, y de las clarificaciones y simplificaciones que tuvo que adoptar [*undertake*] a fin de encontrar el camino hacia el lugar desde el cual está volviendo ahora. Sabe, también, que esas clarificaciones se verán fortalecidas en el viaje de regreso, aunque puede que el [autor] tenga todavía que transmitir al lector su visión de la claridad de las mismas y la impresión de su fortaleza [*strenght*].

Al interpretar el cálculo, lo que hacemos es poner en correspondencia [*match*] los valores o <[fin de la página 112] [comienzo página 113]> estados o elementos permitidos en el cálculo con un conjunto similar de valores o estados o elementos en lo que ha de convertirse en su interpretación. Un interpretación se encuentra correctamente puesta en correspondencia [*matched*] si cada elemento en la misma está asociado con un elemento identificable en el cálculo, y los elementos en cada caso tienen distinciones similares entre si. Aun así, aunque tiene que haber este grado de similitud entre un cálculo y una interpretación del mismo, en cualquier caso de un cálculo con más de un valor, el cálculo y la interpretación son distintos. El hecho de su distinción se hace claro [*plain*] por la pluralidad de maneras en que una interpretación dada puede aplicarse.

Con un cálculo que representa *n* valores distintos hay evidentemente n! maneras diferentes de ponerlos en correspondencia con *n* distintos valores representados en la interpretación, y de este modo [hay] n! formas diferentes que semejante interpretación puede asumir. Al interpretar el cálculo de las indicaciones para la lógica oracional [*sentential*] , pondremos en correspondencia cada uno de los estados de la distinción primaria con cada uno de los estados distinguidos por lo que es verdadero y lo que no es verdadero, lo que nos ofrecerá 2! = 2 posibles opciones [*choices*] de interpretación.

El hecho de que un cálculo y una interpretación del mismo son entidades distintas es de crucial importancia. Por dejar de aprovechar [*make use of*] este [hecho], nosotros mismos nos privamos [*cut off*] de formas de simplificación que por lo demás se encuentran fácilmente disponibles.

[sigue]...

[continuación página 113]>
Una de tales formas, reconocible con frecuencia en las matemáticas, consiste en el uso subyacente, cuando se requiere, de una construcción que carece [*is devoid*] de interpretación dentro de la aplicación particular, pero que puede no obstante usarse para acortar el camino hacia una respuesta allí. Un ejemplo notable, fuera del campo de la lógica, lo constituye el uso de $i = \sqrt{-1}$, en la teoría electromagnética.

Vemos en lógica que 'no verdadero' significa lo mismo que 'falso', y que 'no falso' también significa 'verdadero'. Así que tenemos la opción [*choice*] de asociar ya sea [*whether*] el estado no marcado con lo verdadero [*truth*] y el estado marcado con lo no verdadero [*untruth*], o asociar el estado marcado con lo verdadero y el estado no marcado con lo no verdadero. Aunque, desde el punto de vista de la calculación [*calculation*], es completamente inmaterial cuál [de las dos opciones elegimos], la última de las dos es de hecho más fácil desde el punto de vista de la interpretación.

En consecuencia, identificamos el estado marcado, y de este modo un<[fin de la página 113] [comienzo página 114]> cruce vacío [*empty cross*], con verdadero [*true*], y el estado sin marcar, y por ende un espacio en blanco, con falso [*false*].

Podemos ahora dejar que las variables a, b, . . . representen [*stand for*] los posibles valores de verdad de las diversas oraciones simples en una oración compleja, y para este propósito podemos asignarle [*allot*] una variable distinta a cada oración simple distinta.

A continuación, debemos encontrar, en el álgebra primaria, las formas que habrán de representar apropiadamente, en el cálculo oracional, las constantes mediante las cuales esos valores son relacionados.

Es claro que podemos interpretar *–a,* o *no a*, a través de [ ]. Es también claro que una tabla de verdad para *a* v *b*, o *a* y/o *b*, tiene exactamente la misma forma como la desplegada por la regla de dominación [*dominance*], de modo que *a* v *b* puede representarse simplemente mediante *ab*. Todas las otras formas pueden ahora construirse a partir de éstas. Así

en palabras	*en el cálculo oracional*	*en el álgebra primaria*
no *a*	*-a*	[ ]
a o *b*	*a* v *b*	*ab*
a y *b*	*a* . *b*	[ ]
a implica *b*	[ ]	[ ]

Es la simplicidad de la representación de la implicación lo que hace que esta opción interpretativa sea más fácil que la alternativa, en la cual [ ] tiene que escribirse [ ].

Al examinar la interpretación como ha sido expuesta [*as thus set out*], advertimos de inmediato dos fuentes de potencia [*power*], ninguna de las cuales se encuentra disponible en el cálculo oracional estándar. Éstas son, notablemente, la condensación de un número de formas de representación [*representative forms*] en una sola forma [*into one form*], y la capacidad [*ability*] para proseguir, donde haga falta, más allá [*beyond*] de la lógica a través de la aritmética primaria.<[fin de la página 114] [comienzo página 115]>

Con respecto a la primera de esas fuentes, podemos tomar, para fines de ilustración, las formas de la conjunción lógica. En el cálculo oracional. Éstas son

$$a . b$$
$$b . a$$
$$-(-a \vee -b)$$
$$-(-b \vee -a)$$
-[ ]
-[ ]

Cada una de estas seis distintas expresiones se escribe, en el álgebra primaria, sólo de una manera,

[ ] .

[sigue]...

[continuación página 115]>
Esta es una simplificación propiamente hablando, puesto que el objeto de hacer que tales oraciones se correspondan con esos símbolos no es la representación [de las mismas], sino la calculación [*calculation*]. De este modo, por el mero principio de evitar una prolijidad innecesaria en las formas de representación [*representative forms*], hacemos el proceso de calculación menos dificultoso [*troublesome*].

Pero la potencia que se nos concede [*grant*] a través de esta simplicidad, aunque grande, es en si misma pequeña comparada con la potencia que queda a nuestra disposición mediante la conexión del álgebra primaria con su aritmética. Porque esta facultad nos permite [*enables us*] prescindir de todo un conjunto de largas y tediosas calculaciones, y también de sus no menos dificultosas alternativas, tales como los exhaustivos (y matemáticamente débiles) procedimientos de construcción de tablas de verdad, y los métodos gráficos (y por ende matemáticamente poco sofisticados) de los diagramas de Venn y sus equivalentes modernos.

Esto se hace posible por el hecho de que las tres clases de expresiones algebraicas, integrales, desintegrales [*disintegral*] y consecuentes [*consequential*], que en la interpretación corresponden a verdadero [*true*] (tautológico), falso (contradictorio), y contingente, son fácilmente [*readily*] distinguibles mediante manipulación [de símbolos].<[fin de la página 115] [comienzo página 116]>

Ejemplo. Clasifíquense las siguientes oraciones complejas con respecto a su verdad [*truth*], no verdad [*untruth*], o contingencia.

1. [ ]
2. [ ]
3. [ ] .

1	= [ ]	transcripción
	= [ ]	gen (C2)
	= [ ]	gen
	= ¬	int (C3) .

Verdadera [*true*].

2	= [ ]	transcripción
	= [ ]	tra (J2)
	= [ ]	gen (C2) (dos veces)
	= [ ]	int (C3) (dos veces)

= pos (J1) (tres veces) .

Falsa [*false*].

3 = [ ] transcripción

= [ ] ref (C1)

= [ ] occ (C4) (dos veces) .<[fin de la página 116] [comienzo página 117]>

Contingente.

Estas calculaciones, conducidas en el álgebra primaria, son tan simples que resultan ser matemáticamente triviales. Es decir, desde el momento que cada una de las oraciones es transcrita en el cálculo de indicaciones, para cualquier persona familiarizada con esta forma la respuesta se hace obvia con una mera inspección [ocular de las fórmulas]. Aquí he llevado a cabo las calculaciones lentamente, en pasos muy pequeños, bajo la suposición de que el lector no se encuentra aún familiarizado con la forma.

Las consecuencias de esta disponibilidad de la aritmética [*arithmetical availability*] son radicales [*sweeping*]. Todas las formas de la implicación primitiva se vuelven redundantes, puesto que tanto las mismas como sus derivaciones se construyen fácilmente a partir de [*from*] un solo cruce [*a single cross*] o se comprueban [*tested*] por reducción a éste. Por ejemplo, todo [el contenido] de las páginas 98-126 de *Principia Matemática* puede ser reescrito sin pérdida de [rigor] formal en el símbolo único [*in the one symbol*]

¬

[sigue]...

[continuación página 117]>

siempre que, a estas alturas [*at this stage*], las formalidades de la calculación y la interpretación se encuentren implícitamente sobreentendidos, como efectivamente [*indeed*] lo están en *Principia*. Estimando [*allowing*] unos 1500 símbolos por página [*to the page*], esto representa una reducción del nivel de ruido matemático [*mathematical noise-level*] por un factor de más de 40000.

Con tan inmensa ganancia en la claridad formal de las expresiones, la invalidez de un argumento falso está igualmente abierta a una confirmación inmediata. Ilustramos [el punto] con un argumento semejante abajo, presentado [*offered*] por Maurant[18] como un dilema.

> Si hemos de tener una economía sólida [*sound*], debemos impedir la inflación monetaria. Pero si hemos de tener una economía en expansión tenemos que permitir la inflación de la moneda. Hay inflación monetaria o no la hay. Por consiguiente, ni tendremos una economía sólida ni una economía en expansión.

Hagamos que

s	represente a [*stand for*]	*tenemos una economía sólida*
c	represente a	*hay inflación monetaria*
e	represente a	*tenemos una economía en expansión*.

<[final de la página 117] [comienzo de la página 118]>

Transcribiéndolo al álgebra primaria, enontramos

[ ]

= [ ] pos (J1),

ref (C1) .

Esta expresión es consecuente, pero si el hecho no es todavía patente [*apparent*], podemos usar la conversa del teorema 16 con una variable arbitraria y una constante, digamos c = ¬ , obteniendo [*giving*]

[   ]
= [   ]   int (C3),
ref (C1) (tres veces),
gen (C2) .

Esto claramente no puede ser reducido, ni tampoco puede serlo el original. Así que no hay dilema. Otras características del argumento son también iluminadas, especialmente la total irrelevancia de la premisa '*c* o no *c*'.

Si retrocedemos [*stand back*] por un momento para mirar [*regard*] la estructura de una lógica de la implicación [*implicational logic*], como la de Whitehead y Russell, vemos que la misma se encuentra plenamente contenida en la [estructura] de una lógica de la equivalencia. La diferencia está en la índole de los pasos usados [*in the kind of step used*]. En un caso, las expresiones se separan [*are detached*] en el punto de implicación [*at the point of implication*], en el otro se separan en el punto de equivalencia.

Si una expresión se separa en el punto de implicación, no necesita por supuesto ser equivalente a la expresión de la cual se deriva. Pero si es una tautología, ésta puede ser implicada sólo por otra tautología, de modo que, en tales casos, el signo de implicación puede siempre reemplazarse por un signo de equivalencia. Así una lógica de la implicación degenera de hecho en una lógica de la equivalencia en lo que respecta a la clase de los enunciados [*statements*] verdaderos, con lo cuales tales lógicas están más estrechamente preocupados [*concerned*].<[fin de la página 118] [comienzo página 119]>

El teorema de completitud para el álgebra primaria [que figura] en el texto constituye lo que, interpretado en la lógica, se llama un teorema de completitud fuerte, puesto que incluye el más débil teorema original[19] de Post. La versión más débil meramente afirma [*asserts*] que todos los enunciados verdaderos están implicados por los enunciados verdaderos inicialmente dados como primitivos. Puesto que, en el caso de

[sigue]...

[continuación página 119]>
los enunciados verdaderos la implicación es equivalente a la equivalencia, vemos que
semejante teorema debe ser incluido en un teorema que estipule [*state*] la completitud de todas las formas de equivalencia, independientemente de si los enunciados interpretados a partir de las mismas son verdaderos, falsos o contingentes.

Podemos ahora pasar a considerar cómo el cálculo de indicaciones puede aplicarse a la lógica tradicional de las clases. Antes de hacer esto, es de interés plantear [*state*] una suposición hasta ahora silenciada [*silent*] (o relativamente silenciada) a los efectos de que, en ausencia de instrucciones en contrario, suponemos que las premisas de un argumento se encuentran conectadas [*related*] por conjunciones lógicas. Por ejemplo, al transcribir el presunto [*alleged*] dilema de arriba, cruzamos primero [*we first cross*] la transcripción de cada premisa individual y luego cruzamos el resultado para obtener [*give*] la conjunción, y finalmente cruzamos todo esto de nuevo para la implicación. De hecho hemos llegado habitualmente a considerar la conjunción 'y' como la constante propia de los intersticios [*as the proper interstitial constant*]. Pero podríamos, por ejemplo, reformular tanto la lógica oracional como la de las clases sobre la suposición de que 'o', en vez de 'y', es la constante que conecta las premisas. Al lector podría gustarle intentar una prueba de esto. Constituye un ejercicio revelador, especialmente con respecto a la lógica de las clases, y no es difícil.

Todas las formas universales de la lógica tradicional de las clases pueden ser acomodadas dentro de la lógica de las oraciones, de modo que consideraremos primero estas formas. Para acomodarlas usamos el patrón [*pattern*] [expresado] en la siguiente clave [*in the following key*].

para *todos los a son b* use [ ]
para *ningún a es b* use [ ]

y otras formas como corresponda consecuentemente [*accordingly*]. Para evitar el empleo de letras distintas para oraciones y clases, en las formas de calcular [*calculating forms*] podemos dejar que cualquier variable literal simple v represente la oración [ ], i.e. 'x es un miembro de la clase v'. Esto no dará origen a ninguna confusión no intencional, puesto que el signo v, cuando se usa para denotar la clase, <[fin de la página 119] [comienzo página 120]> no entra en la calculación, que es emprendida con v representando únicamente el valor de verdad de la oración correspondiente..

Tomando la forma de un silogismo en el modo Barbara, y poniendo primero la premisa menor, como hacen Whitehead y Russell, hallamos

si todos los a son b
y todos los b son c
entonces todos los a son c

que podemos representar mediante

[ ]
F1 = [ ] ref
= ¬ gen (tres veces), int.

Se ve así que la forma oracional constituye una tautología y el argumento, por ende [*thereby*], es válido. En el caso de un argumento inválido, la expresión algebraica no se reducirá a un cruce, de modo que tenemos un sistema confiable [*reliable*] para comprobar [*testing*] la validez de cualquier argumento universal que tenga forma de silogismo. Más tarde estudiaremos un método que determinará la conclusión a partir de las premisas solas [*from the premisses alone*]. Como vemos, en la presente forma, aunque su validez puede ser comprobada [*be tested*], de ser dadas las premisas solas la conclusión puede hallarse sólo por ensayo [*trial*] y [error].

[sigue]...

[continuación página 120]>

Los problemas de equivalencia son similarmente susceptibles de ser resueltos de esa manera.

Ejemplo. [20] Un club tiene las reglas siguientes.

(a) El Comité de Finanzas debe ser escogido entre los [miembros] del Comité General,
(b) Nadie será miembro de los Comités General y de Biblioteca a menos que esté también en el Comité de Finanzas,

(c) Ningún miembro del Comité de Biblioteca estará también en el Comité de Finanzas.<[fin de la página 120] [comienzo página 121]>

Simplifíquense estas reglas.

Procedimiento.

para	*x es un miembro del Comité de Finanzas*	escriba	*m*
para	*x es un miembro del Comité General*	escriba	*g*
para	*x es un miembro del Comité de Biblioteca*	escriba	*b*

Usualmente se sobreentiende que la constante que está en los intersticios de un conjunto de reglas es una conjunción, de modo que podemos ahora transcribirlas al álgebra primaria como sigue.

[ ]

Nuestro propósito es reducir esto, si fuera posible, a una forma de conjunción más simple que sea equivalente, y pueda así usarse para reemplazar el conjunto original de reglas.

F2	[ ]	ref
	= [ ]	cro (C9)
	= [ ]	gen, tra, ref
F3	= [ ]	gen
	= [ ]	cro
	= [ ]	tra
F4	= [ ]	occ (dos veces)<[fin de la página 121]

[comienzo página 122]>

Retranscribiendo se obtiene la respuesta

(1) El Comité de Finanzas debe ser escogido entre los [miembros] del Comité General.

(2) Ningún miembro del Comité General estará en el Comité de Biblioteca.

Podemos verificar [*check*] esta respuesta mediante el teorema 16. Sea *m* = ¬ .

Ahora F2 = [ ]

F4 = [ ] = [ ] .

Sea *m* = . Ahora

F2 = [ ]

F4 = [ ] ,

De modo que la respuesta es correcta, siempre y cuando hayamos interpretado el problema adecuadamente [*properly*].

Vemos que, a partir de esta respuesta, podemos obtener una implicación (no una equivalencia) a los efectos de que ningún miembro del comité de biblioteca estará en el comité de finanzas, puesto que cruzando [*crossing*] F4 (para la implicación) y reflejando [*reflecting*] obtenemos

[ ] ,

y ahora añadiendo nuestra conclusión tentativa se tiene

[ ] = ¬ .

La estructura matemática ilustrada en esta suerte de inferencia sugiere la siguiente proposición. <[fin de la página 122]

[sigue]...

[comienzo página 123]>

Teorema interpretativo 1

Si se interpreta el álgebra primaria de tal modo que las expresiones integrales son verdaderas, y cada una de un número de premisas de inclusión de clase [class-inclusion] *es transcrita como oración en el álgebra, y las variables que representan una misma oración en niveles impares y pares son canceladas, lo que queda, cuando es vuelto a transcribir* [when retranscribed], *es la conclusión lógica.*

La prueba no es difícil y puede dejársele al lector. El teorema en si, como un un atajo [*short cut*] para la inferencia, posee una potencia considerable [*is of considerable power*]. Para ilustrarlo, podemos tomar el último sorites de Lewis Carroll.

El problema consiste en extraer [*draw*] la conclusión del siguiente conjunto de premisas.

(1) Los únicos animales en esta casa son gatos;

(2)Todo animal que le gusta contemplar [*gaze*] la luna es apto para ser mascota;

(3)Cuando detesto un animal, lo evito;

(4)Ningún animal es carnívoro si no [*unless*] merodea en la noche;

(5)Ningún gato deja [*fails*] de cazar ratones;

(6)Ningún animal jamás se me acerca, excepto los que están en esta casa;

(7)Los canguros no son aptos para ser mascotas;

(8)Ninguno, excepto un carnívoro, mata ratones;

(9)Detesto los animales que no se me acercan;

(10)A los animales que merodean en la noche les gusta contemplar la luna.

El método empleado hasta ahora para resolver un problema semejante era buscar la solución [*work it out*] por etapas, pero esto puede tomar mucho tiempo. Usando el teorema de arriba, simplemente adoptamos una variable distinta para cada conjunto distinto (pero no complementario), transcribimos, cancelamos, y arribamos a la respuesta de manera prácticamente instantánea. Procedamos, pues, a adoptar

h para *casa, en esta*
c para *gato*
p para *mascota, apto para ser* <[fin de la página 123] [comienzo página 124]>
d para *detestado por mi*
a para *evitado por mi*
m para *luna, le gusta contemplar la*
v para *carnívoro*
n para *noche, merodea en la*
k para *mata ratones*
t para *se me acerca*
r para *canguro*

Por el principio de relevancia vemos que no necesitamos adoptar una variable para el conjunto de los animales. Procedemos ahora a la transcripción y la cancelación

[ ]

que revela [ ]. Por consiguiente, todos los canguros son evitados por mi [o ‘evito todos los canguros’].

Hasta ahora hemos considerado cómo el cálculo de indicaciones, en la forma del álgebra primaria, puede usarse para clarificar y simplificar problemas en la lógica oracional, y también aquellos de contenido [*import*] universal, o no existencial, en la lógica de las clases o en la teoría de conjuntos. Pasaremos ahora a considerar su extensión, en la lógica de las clases, a problemas de contenido existencial, o particular.

Resolvimos la cuestión de cómo representar un enunciado [*statement*] tal como

todos los a son b

traduciéndolo a una [oración] compleja equivalente en el cálculo oracional. La cuestión que debemos ahora tratar de contestar es ¿puede un enunciado existencial tal como

algunos a son b

ser traducido de manera similar?

Notemos primero que para contradecir la aserción general todos los a son b, es suficiente encontrar algunos a que no son b. Podemos notar, de paso, que el enunciado
<[fin de la página 124]
[sigue]…

[comienzo página 125]>

ningún a es b

no contradice todos los a son b

puesto que en caso de que a no exista [*is non-existent*], ambas aserciones son verdaderas.

Transcribiendo de acuerdo con los principios ya adoptados, consideramos que

algunos a no son b

dice

no todos los a son b

y así lo representamos mediante

[ ] .

De manera similar representamos

algunos a son b

mediante

[ ] .

Para ver cómo esto funciona [*works out*], transcribimos otro silogismo, esta vez con contenido existencial. Así

todos los a son b
algunos a son c
algunos b son c

se convierte en [*becomes*]

[ ]
= [ ]
= ¬ . <[fin de la página 125] [comienzo página 126]>

Puesto que hay otra manera en que podemos ver que este silogismo es válido, el mismo parece estar representado adecuadamente. Pero usando las mismas reglas podemos representar

algunos a son b
algunos b son c

algunos *a* son *c*

sabiendo que es inválido, mediante

[ ]

= [ ]

= ¬ ,

en donde aparece siendo válido. ¿Cómo resolvemos esta aparente contradicción?

Debemos estar claros sobre un punto. La cuestión es respondida en los libros de texto (tácitamente, porque usualmente no es planteada de modo explícito) como fue originalmente resuelta [*answered*] por Aristóteles, dando un conjunto más o menos complicado de reglas que desautorizan [*disallow*] esta inferencia. Pero un conjunto de reglas para decir *que* uno no debe hacer algo no es una explicación de *por qué* uno no debe hacerlo, ni el hecho de que, si permitimos esa inferencia, ésta *puede* llevarnos a una conclusión impropia, tampoco satisface [*meet*] el elevado grado de comprensión [*understanding*] que se requiere de todas las exposiciones [*account*] explicativas* en este libro. Hemos encontrado un área en donde un procedimiento interpretativo aparentemente impecable súbitamente nos ha fallado [*let us down*], y todas las reglas que [nos] dicen que debemos *por consiguiente* evitar esta área, tienen un insatisfactorio sabor *ad hoc*, por más bien que esas reglas operen en la práctica. <[fin de la página 126 (sin la nota al pie)] [comienzo página 127]>

Tampoco sirve recurrir a formas gráficas, tales como los diagramas de Venn, puesto que éstos, en común con otros gráficos, ofrecen una comprensión [*realization*] pintoresca que es periférica, no central, a la cuestión. Para resolverla [*to answer it*] tenemos que encontrar un enfoque [*approach*] [que sea] del todo mucho más sutil.

Empezamos con la observación de que los enunciados [*statements*] acerca del universo del discurso, e.g.

[comienzo página 123]>

Teorema interpretativo 1

Si se interpreta el álgebra primaria de tal modo que las expresiones integrales son verdaderas, y cada una de un número de premisas de inclusión de clase [class-inclusion] *es transcrita como oración en el álgebra, y las variables que representan una misma oración en niveles impares y pares son canceladas, lo que queda, cuando es vuelto a transcribir* [when retranscribed], *es la conclusión lógica.*

La prueba no es difícil y puede dejársele al lector. El teorema en si, como un un atajo [*short cut*] para la inferencia, posee una potencia considerable [*is of considerable power*]. Para ilustrarlo, podemos tomar el último sorites de Lewis Carroll.

El problema consiste en extraer [*draw*] la conclusión del siguiente conjunto de premisas.

(1) Los únicos animales en esta casa son gatos;

(2)Todo animal que le gusta contemplar [*gaze*] la luna es apto para ser mascota;

(3)Cuando detesto un animal, lo evito;

(4)Ningún animal es carnívoro si no [*unless*] merodea en la noche;

(5)Ningún gato deja [*fails*] de cazar ratones;

(6)Ningún animal jamás se me acerca, excepto los que están en esta casa;

(7)Los canguros no son aptos para ser mascotas;

(8)Ninguno, excepto un carnívoro, mata ratones;
(9)Detesto los animales que no se me acercan;
(10)A los animales que merodean en la noche les gusta contemplar la luna.

El método empleado hasta ahora para resolver un problema semejante era buscar la solución [*work it out*] por etapas, pero esto puede tomar mucho tiempo. Usando el teorema de arriba, simplemente adoptamos una variable distinta para cada conjunto distinto (pero no complementario), transcribimos, cancelamos, y arribamos a la respuesta de manera prácticamente instantánea. Procedamos, pues, a adoptar

h para *casa, en esta*
c para *gato*
p para *mascota, apto para ser* <[fin de la página 123] [comienzo página 124]>
d para *detestado por mi*
a para *evitado por mi*
m para *luna, le gusta contemplar la*
v para *carnívoro*
n para *noche, merodea en la*
k para *mata ratones*
t para *se me acerca*
r para *canguro*

Por el principio de relevancia vemos que no necesitamos adoptar una variable para el conjunto de los animales. Procedemos ahora a la transcripción y la cancelación

[ ]

que revela [ ]. Por consiguiente, todos los canguros son evitados por mi [o 'evito todos los canguros'].

Hasta ahora hemos considerado cómo el cálculo de indicaciones, en la forma del álgebra primaria, puede usarse para clarificar y simplificar problemas en la lógica oracional, y también aquellos de contenido [*import*] universal, o no existencial, en la lógica de las clases o en la teoría de conjuntos. Pasaremos ahora a considerar su extensión, en la lógica de las clases, a problemas de contenido existencial, o particular.

Resolvimos la cuestión de cómo representar un enunciado [*statement*] tal como

todos los *a* son *b*

traduciéndolo a una [oración] compleja equivalente en el cálculo oracional. La cuestión que debemos ahora tratar de contestar es ¿puede un enunciado existencial tal como

algunos *a* son *b*

ser traducido de manera similar?

Notemos primero que para contradecir la aserción general todos los *a* son *b*, es suficiente encontrar algunos *a* que no son *b*. Podemos notar, de paso, que el enunciado

<[fin de la página 124]

[sigue]...

[continuación página 127]>

si hay un *a* en el mismo [*it*]

entonces este a es también un b en el mismo,

no hace ninguna afirmación de [*assert no claim to*] la *existencia* de cosa alguna [*anything*] en el mismo, aunque en un nivel diferente puede considerarse [*be taken*] que afirman [*claim*] la existencia del universo que tiene esas propiedades condicionales. Pero para negar semejante enunciado [*statement*], afirmamos que

existe en el mismo al menos un a que no es un b .

Ahora la distinción entre existente [*existing*] y no existente no se aplica como la distinción entre verdadero y no verdadero. Si un enunciado s es verdadero, entonces su enunciado complementario $-s$ es falso. Pero si una cosa t existe, entonces su cosa complementaria no t no necesariamente es no existente. En el universo de Inglaterra, el complemento de Londres es el campo [*country*]. Ambos, al momento de escribir esto, aparentemente existen. Así ninguna existencia se sigue [*follows*] de otra existencia, de modo que a partir de un enunciado, o de una lista de enunciados, que aseveran solamente existencia, ninguna conclusión adecuada puede extraerse.

Hasta ahora nos encontramos todavía en la periferia. Esto es decir, estamos aún examinando la forma de la interpretación sin encontrar exactamente cuándo y dónde la misma pierde el apoyo de [*breaks faith with*] las matemáticas.

Al relacionar las matemáticas y la interpretación , encontramos formas tales como [ ]

que, en su interpretación, no dicen nada acerca de la existencia, ni afirmándola ni negándola. Pero esas formas, cuando son cruzadas [*when crossed*] ,

[ ] ,<[fin de la página 127] [comienzo página 128]> ahora sí dicen algo sobre la existencia, al menos en la interpretación que les hemos permitido.

La expresión [ ] es universal porque limita la configuración [*shape*] del universo de modo que no hay espacio en éste para un a que no es un b. Al menos así es como nosotros la tomamos. Pero *podríamos* (aunque no lo hagamos) considerar que significa, simplemente, que este universo sucede precisamente [*just*] que no existe un a que es un b, aunque hay el espacio, si lo queremos, para sostener [*hold*] uno. En otras palabras, podríamos (aunque no lo hacemos) interpretarla existencialmente.

De manera similar *podríamos* interpretar la expresión [ ] universalmente. Porque el enunciado algunos a no son b, aunque *suficiente* para contradecir el enunciado de que todos los a son b, no es *necesario*. Una manera alternativa de contradecirlo sería simplemente negar que el universo sea de una forma tal que requiera de cualquier a que éste sea también un b, sin tener realmente que exigir la existencia de un a para probarlo.

En esta alternativa tenemos un medio de confinar todas las interpretaciones a un contenido no existencial. Veamos ahora como opera en el caso del silogismo inválido Debemos ahora escribir

algunos a son b
algunos b son c
algunos a son c

en la forma

no es el caso que ningún a es b
no es el caso que ningún b es c
no es el caso que ningún a es c,

haciendo explícito el requerimiento de que ningún enunciado ha de ser tomado existencialmente.

Aun así, a primera vista, no nos encontramos completamente a salvo de dificultades [*out of trouble*]. Porque aunque, a partir de semejante descripción, el universo parece [verse] forzado [*compelled*] a reservar espacio para *a*'s que podrían ser *b*'s y para *b*'s que podrían ser *c*'s, no parece *forzado* (como debería estarlo, por la implicación) a reservar ningún espacio para *a*'s que podrían ser *c*'s.<[fin de la página 128] [sigue]...

[comienzo página 129]>

Pero un universo sin semejante [*such*] espacio contendría a lo sumo [*at most*] seis departamentos diferentes, puesto que le estaría faltando [*it would be missing*] un departamento para *a*'s que son también *b*'s que también son *c*'s, y para *a*'s que son también no *b*'s que también son *c*'s. Ahora, hay un bien conocido teorema, una prueba del cual fue publicado [14, p 309] por Huntington en 1904, de acuerdo con el cual *el número de elementos en cada* [every] *campo lógico finito tuene que ser* [must be] 2^m (*siendo m un entero* >0). Así un álgebra adecuada para un campo lógico [que sea] tal no puede, sin restricciones adicionales [*without further constraints*], representar una forma en la que el número de elementos no sea una potencia natural entera de 2. Una restricción tal, cuando se requiere, normalmente se impone a través de las premisas. Es decir, si se requiere que cualquiera de los 2^m espacios posibles esté ausente el universo, el mismo debe ser positivamente (i.e. referencialmente) excluido. Ninguno de los ocho espacios posibles es excluido por las premisas del silogismo de arriba, y así los ocho todos deben presumirse que existen, o la forma matemática no puede ser apropiadamente interpretada. Y si existen, se sigue la conclusión.

Otra manera, quizás más fácil, de ver *en qué sentido* el silogismo tradicionalmente inválido de arriba es válido, es regresar a nuestro método original de interpretación. Usando constantes oracionales estándares el [silogismo] se convierte en [*becomes*]

[

]

[ ]

y en esta forma es, por supuesto, verdadero [*true*].

Que no haya ningún mal entendido [*let there be no mistake*], no estamos afirmando que el silogismo, considerado aisladamente, dentro del significado corriente de 'algunos *a* son *b*, algunos *b*. . .etc.' no sea otra cosa más que inválido. Se trata sólo de que, al intentar ponerlo en [el marco de] un fundamento matemático más profundo, nos encontramos (o tropezamos) con la relación de inconsecuencia, patente en el habla corriente [*apparent in the ordinary speech*], entre una forma y su contenido, ocasionada por el hecho parcialmente accidental de que la existencia de un contenido particular puede servir para negar una forma general.

Nos queda lograr salirnos, tan elegantemente como podamos, de la confusión no intencional que se sigue de semejante estado de cosas: o alternativamente, si hemos conseguido liberarnos, idear [*devise*] el menos conflictivo [*most peaceful*] conjunto de reglas <[fin de la página 129] [comienzo de la página 130]> mediante las cuales la posibilidad de semiente confusión pueda ser enterrada [*laid to rest*]. Las reglas que, por tradición, han sido enumeradas [*enlisted*] para servir este propósito son demasiado numerosas para lo que básicamente es una simple ambigüedad, y las mismas pueden seguramente ser reducidas.

Una tal reducción será, como hemos visto, matemáticamente potente si puede ser llevada a un punto de degeneración. En este caso la degeneración ideal sería [llegar] a un lugar [*place*] donde las dos clases de negación [*denial*], universal o existencial, de una proposición universal equivalgan a la misma cosa [*amount to the same thing*]. En tal punto podríamos usar libremente el cálculo, sin temor de que nos defraude [*leting us down*].

Hemos observado que mientras las inferencias o las ecuaciones en la lógica de las clases son interpretadas universalmente, el álgebra primaria puede usarse libremente para determinarlas. En otras palabras, la forma oracional dentro de la cual colocamos los enunciados universales acerca de las clases o los conjuntos puede verse que los acomodan exactamente, sin pérdida ni ganancia [en términos formales]. Son las negaciones de tales enunciados, cuando deseamos interpretarlos existencialmente, los que ofrecen dificultades, que surgen evidentemente de una ganancia formal, puesto que encontramos la necesidad de restringir el cálculo en este sentido, antes que [*rather than*] relajarlo.

Volvamos, por un momento, a examinar nuestro procedimiento para resolver el problema de Bowden sobre las reglas del club. En el camino [*path*] algebraico para su solución encontramos una expresión

[sigue]...

[continuación página 130]>

[ ] ,

marcada F3. Tomada existencialmente, significaría

[either]*o* algunos g no son b
o algunas cosas no son ni m ni g
o algunas cosas no son ni m ni b.

Pero de hecho todo el argumento depende de no tomar F3, o ninguna otra expresión intermedia, de esta manera. Algebraicamente, por supuesto, eso no importa, no tenemos opción, y llegamos a la respuesta quiérase o no [*willy-nilly*]. Es sólo al volver a recorrer el camino [*retracing the path*] por el cual llegamos allí, y detenernos en la vía para mirar los escollos [*pitfalls*], cuando vemos el prospecto de los peligros de interpretación, que en efecto son eludidos [*by-passed*].<[fin de la página 130] [comienzo de la página 131]>

La primera regla que, por consiguiente, se insinúa por si misma, es nunca hacer una interpretación existencial a menos que el argumento lo demande. Ninguna demanda semejante es evidente en el problema de Bowden, y así, al resolverlo, podemos en efecto evitar la existencia, y de este modo evitar los escollos que trae consigo [*brings in its train*] La cuestión que se presenta entonces por si sola es cuán lejos podemos llevar esta evitación [*avoidance*], o considerado al revés ¿en qué circunstancias, y en qué lugar, en el curso de resolver un problema, necesitamos alguna vez hacer una interpretación existencial?

La respuesta es en ninguna. Las interpretaciones existenciales, allí donde son absolutamente necesarias, pueden confinarse a entrar y dejar [*entering and leaving*] el problema, y nunca necesitan ocurrir en el curso de resolverlo.

Para ver cómo ocurre esto, podemos volver al silogismo en Barbara, tomado en la forma

F1 [ ] .

Puesto que el orden de cada uno de los tres complejos en F1 es irrelevante para el significado de la totalidad de la expresión, podemos transponerla para encontrar

F1’ [ ]

= [ ] ,

que puede retranscribirse

todos los *a* son *b*
algunos *a* no son *c*
algunos *b* no son *c*.

Transponiéndola todavía otra vez, encontramos

F1” [ ] <[fin de la página 131] [comienzo página 132]>

que dará

algunos *a* no son *c*
todos los *b* son *c*
algunos *a* no son *b*.

Así vemos que la forma representativa de un silogismo en Barbara (recordando que en cada caso hemos puesto primero lo que se llama la premisa menor) *es también* representativa de los silogismos en Bocardo y Baroco. Los tres silogismos arriba, siendo efectivamente reductibles a la misma expresión matemática, deben por consiguiente representar, en este nivel, una *idéntica* forma de argumento.

Esto es tan interesante como fascinante. Es interesante porque, a partir de ello, podremos obtener una estructura de reglas [*rule-structure*] mucho más simplificada para los argumentos existenciales, y fascinante por la luz que arroja sobre lo que estamos haciendo cuando argüimos a partir de la existencia. Podemos señalar de paso, como Prior nos recuerda [21], que algunos vislumbres del camino hacia esta identidad aparecen en la obra de Aristóteles, quien se refiere a una forma últimamente descrita [22] de manera más completa por Ladd-Franklin, en la que aquello que ella llama un antilogismo condensa tres silogismos. Aquí elucidamos una etapa ulterior, en la que la naturaleza de tres-en-uno del silogismo se hace evidente a partir de su sola transcripción, sin recurrir a una imagen o antilogismo.

[sigue]...

[continuación página 132]

De la conversión (o conversa) de lo que acabamos de contar de nuevo [recount], observamos la siguiente proposición.

Teorema interpretativo 2

Una inferencia existencial es válida sólo hasta donde [in as far as] *su estructura algebraica puede verse como una inferencia universal.*

Por ejemplo, cada uno de los argumentos existenciales transcritos a partir de F1’ y F1” es válido debido a la validez del argumento universal transcrito a partir de F1.<[fin de la página 132] [comienzo página 133]>

Esta sola regla se hace cargo [*takes care*] de todas las distintas [*separate*] reglas de los silogismos, sus partes y sus extensiones. Incluye hasta [*even*] la previsión [*provision*] de que no habrá más que una premisa particular, porque con más de una, no es posible ninguna representación como un argumento universal.

Hemos encontrado aquí la degeneración que estábamos buscando, en el lugar donde lo existencial se condensa con lo universal. Esta degeneración, como la asumida [*undertaken*] anteriormente [*earlier*] para el cálculo oracional, constituye una liberación [*release*] de las ataduras [*bond*] de los particular, y a través de la misma vemos la totalidad [*whole*] de la estructura silogística en el prototipo único

[ ] .

En este prototipo podemos, no sólo transponer cada [expresión] compleja, sino que podemos también cruzar independientemente cada variable literal, encontrando, mediante una combinación de esos medios, un conjunto de 24 distinguibles argumentos válidos. Formalmente no hay ninguna diferencia entre los mismos. Si distinguimos cualquiera [de ellos], deberíamos distinguirlos todos. De hecho no todos los veinticuatro [argumentos] son distinguidos en la lógica, que arriba algo arbitrariamente al número de quince.

De este modo, realizando una condensación, no necesitamos ya más recordar, para los silogismos o los argumentos relacionados, las fatigosas reglas de su construcción y su validez. Todas éstas se encuentran ahora subsumidas en la simple forma básica e interpretación a la que las hemos reducido aquí, y pueden reconstruirse a partir de la misma.

Podemos volver, por un momento, a reconsiderar el sorites, que es la forma general bajo la cual el silogismo es el miembro primario, A la luz de la degeneración asumida arriba, vemos que el método que hemos desarrollado para revelar una conclusión mediante cancelación se aplica igualmente ya sea que se trate de un argumento universal o existencial. Para un sorites universal tenemos

[ ] ,

[ ].

Para convertirlo en uno existencial simplemente negamos la <[fin de la página 133] [comienzo página 134]> conclusión y la transponemos con una de las premisas que, en si misma negada, se convierte [*becomes*] en la nueva conclusión. Así a partir de

[ ] ,

[ ] ,

encontramos, por ejemplo, el conjunto de premisas

[ ]

a partir del cual, al igual que antes, la conclusión puede ser revelada mediante cancelación,

[ ] .

Lo único que necesitamos recordar es que la misma ahora será existencial, y por ende debería en este caso escribirse

[ ] .

[sigue]...

[continuación página 134]>

Dejamos la exposición aquí, donde el lector interesado podrá continuarla a su gusto. El problema resuelto hasta ahora, y las preguntas contestadas, son simples, aunque el cálculo, en la práctica, se aplica [23] con éxito a la solución de problemas de gran complejidad. Mucho de eso, en el nivel primitivo, comúnmente se pasa por alto, y lo que normalmente se ve es relatado [*recounted*] de una manera tan fragmentaria que apenas resulta coherente. El mismo acto de detenerse [*dwelling*] por un momento incluso en una forma simple puede evidentemente drenar [*tax*] las propias fuerzas de uno [*the whole of one's powers*], de modo que dejar las formas simples antes de que uno se encuentre debidamente familiarizado con las mismas puede resultar en muchas ingratas [*unrewarding*], o en gran medida ingratas excursiones matemáticas.

Preocuparse, como lo hemos estado, con lo que puede encontrarse, si lo buscamos, al nivel de la simplicidad extrema, está en el camino de <[fin de la página 134] [comienzo página 135] > encontrarse [*being*] más allá de lo elemental, pero más allá en el lado de la simplicidad, no de la complejidad. De por si esto no hace que lo que está aquí escrito sea más fácil de seguir, pero si el lector está listo para construir con indulgencia [*with charity*] sobre las insuficiencias [del texto] podría encontrar en ello algo suficientemente gratificador [*reward*] como para hacerle justicia a sus esfuerzos [*labours*] y a los míos. <[fin de la página 135] [conclusión del Apéndice 2]

NOTAS AL PIE DE PÁGINA DEL APÉNDICE 2

Página 117

[18] John A. Maurant, *Formal logic*, New York, 1963, p. 169.

Página 119

[19] Emil L. Post, *Amer. J. Math.*, 43 (1921) 163-85.

Página 120

[20] en B. V. Bowden, *Faster than thought* [Más veloz que el pensamiento], Londres, 1953, p. 36.

Página 126

* *Explicar* [explain], literalmente *extender* [lay out] en un *plano* donde los particulares puedan ser fácilmente vistos. Por ende [*thus*] *situar* [place] o *trazar* [plan] en terreno *llano* [flat], sacrificando otras dimensiones en favor de [*for the sake of*] de la visibilidad [*appearance*]. De esta manera, *exponer* [expound] o *exhibir* [put out] al costo de ignorar la *realidad* o *riqueza* de lo que es así exhibido. Por ende, adoptar una mirada [*to take a view*] alejada de su *realidad primera* [prime reality] o *realeza* [royalty], o ganar conocimiento [*gain knowledge*] y perder el reino [*lose the kingdom*].

Página 132

[21] A. N. Prior, *Formal logic*, 2da. Edición, Oxford, 1964, p. 113.

[22] C. F. Ladd-Franklin, *Mind*, 37 (1928) 532-4.

Página 134

[23] Cf G. Spencer-Brown, British Patent Specifications [Especificaciones de Patente Británica] 1006018 y 1006019 (1965)